Der akustische Doppler-Effekt

Doppler einmal anders

R. Sydow, Niederfinow (Deutschland)
(2022)

abstrakt: Der akustische Doppler-Effekt ist gut untersucht und in der Literatur weitestgehend erläutert. Ob man allerdings mit den in der Literatur veröffentlichten Formeln auch die allgemeinste Form dieses Effektes hat, ist zu bezweifeln.
Hier wird gezeigt, dass die allgemeine Formel auch die Bewegung des Mediums, in welchem sich der Schall ausbreitet, zu beachten ist. Die entsprechende Formel wird hergeleitet und ein Beispiel durchgerechnet.
Es wird offensichtlich, dass die Frequenzänderung im Winkel von 90° zur relativen Bewegungsrichtung zwischen Sender und Empfänger nicht grundsätzlich zu null werden muss.

Quellenangabe: Sydow, R. Der akustische Doppler-Effekt, Doppler einmal anders Niederfinow (Deutschland) 06.07.2022
https://rolfswelt.de/physik/#mechanik-der-akustische-doppler-effekt
Revision: 1.1.1.3 vom 16.07.2023

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen

DE Doppler-Effekt

Einleitung

Wenn ein jeder den DE von einem vorbeifahrenden Polizeiauto, Krankenwagen oder Schnellzug kennt, so hatte sich Doppler eigentlich auf ein ganz anderes Problem gestürzt. Er wollte Farbunterschiede der Sterne erklären.
Dabei sah er keinen Unterschied zwischen der Ausbreitung des Lichts und der des Schalls. Beide physikalischen Prozesse sind nach damaliger Auffassung Schwingungsausbreitung in einem Medium. Für den Schall war es die Luft, während es für das Licht der Äther war (siehe [Dop]).
Dass dem nicht so ist, zeigte sich erst in der späteren Entwicklung der Physik. Da hatte man den DE direkt auf den Schall bezogen und mathematisch bestens hergeleitet.

Wozu also das erneute Aufgreifen dieses Themas? Gibt es da noch etwas, was es zu erklären gilt?
Das wird sich im Laufe dieses Artikels zeigen und für Erstaunen sorgen.

Der allgemeine Fall?

Die Beteiligten am akustischen DE sind:

- Die Quelle oder der Sender, der sich mit der Geschwindigkeit v_Q oder v_S gegen das Schallübertragungsmedium bewegt und einen Ton der Frequenz f emittiert
- Der Beobachter oder Empfänger, dessen Geschwindigkeit gegen das Medium v_B oder v_E ist und den emittierten Ton in der ihn erreichenden Frequenz f_B wahrnimmt
- Das den Schall übertragende Medium, dessen Bestandteile in Abhängigkeit von ihren physikalischen Gegebenheiten den Schall sich mit einer Geschwindigkeit v_{Schall}, c oder v_M ausbreiten lässt

Dass sich die Bewegungen von Sender und Beobachter im Medium auf die Veränderung der Sendefrequenz auswirken, ist seit der Veröffentlichung Dopplers ([Dop]) hinlänglich bekannt. Dabei wird heutzutage die Formel:

$$f_B = f\frac{v_{Schall} \pm v_B}{v_{Schall} \pm v_Q} \text{ (vgl. [Bau])} \qquad \text{Gl. 1}$$

als der „Allgemeine Fall“ (ebd.) des DE geschult.

Es ist aber offensichtlich, dass diese Formel (Gl. 1) ausschließlich den Fall einer parallelen Bewegung von Sender und Empfänger vorsieht, bei der der Abstand der parallelen Bewegungsachsen null sein muss. Sie stellt nur den Fall des aufeinander Zukommens oder des voneinander Wegfliegens dar.

Dass dieser Fall nicht allgemein ist, wird jedermann klar, wenn er sich neben den vorbeifahrenden Zug stellt und bemerkt, dass es nicht nur zwei Frequenzen f_B gibt, die in der

Formel durch das Plus-/Minuszeichen repräsentiert werden. Gerade im Moment des Vorbeifahrens des Zuges ist der stetige Übergang von einer in die andere Frequenz wahrzunehmen.

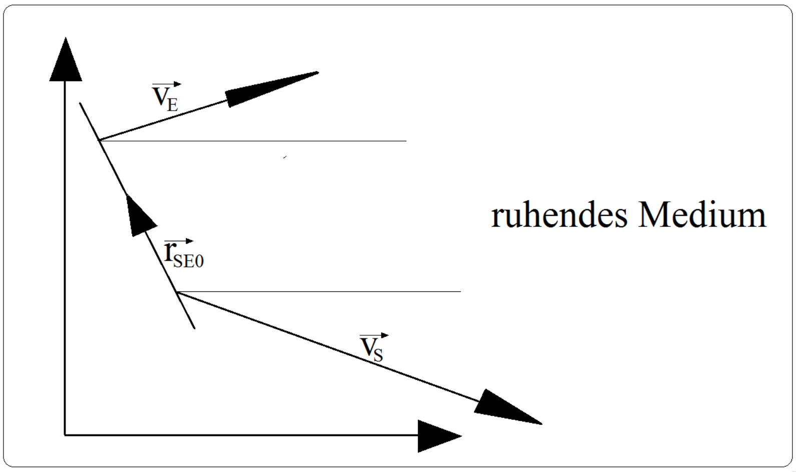

Bild 1: allgemeiner Fall von Bewegungen im Medium

Deshalb wurde für den tatsächlich allgemeinen Fall (siehe Bild 1) des DE eine vektorielle Formel entwickelt:

$$\omega_E = \omega_0' = \omega_0 \frac{1-\frac{\overrightarrow{v_E}\cdot\overrightarrow{r_{SE0}}}{c}}{1-\frac{\overrightarrow{v_S}\cdot\overrightarrow{r_{SE0}}}{c}} \quad \text{(siehe [Kra] S. 23)} \qquad \text{Gl. 2}$$

Hierin stellt $\overrightarrow{r_{SE0}}$ den Einheitsvektor der Verbindungslinie zwischen dem Sender und dem Empfänger zum Zeitpunkt der Betrachtung dar. Auch hier wird das Medium als ruhend angenommen.

Wenn die Ausführungen in [Kra] wie eine Formelsammlung anmuten, findet sich in [Wan] eine ausgiebige Herleitung einer allgemeinen Formel:

$$f' = f\frac{1}{1+\frac{v^2 t}{c\sqrt{d^2+v^2t^2}}} \quad \text{([Wan] S. 4)} \qquad \text{Gl. 3}$$

Leider gilt hier wieder die Einschränkung der Parallelbewegung von Sender und Empfänger.
Dabei bezeichnet v die Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger und t die Zeit im Ablauf der Bewegung, wobei t = 0 für den Fall gilt, wenn Sender und Empfänger auf gleicher Höhe ihrer Parallelbewegung sind.
Dass in den Gleichungen Gl. 2 und Gl. 3 einmal von der Frequenz ω und das andere Mal von der Frequenz f die Rede ist, ist für den Effekt ohne Bedeutung.

Aber mit diesen Formeln solle es möglich sein, den Einfluss jeden Bewegungsfalls zwischen Sender und Empfänger auf eine Frequenzverschiebung zu berechnen. Eine weitere Betrachtung des DE scheint überflüssig.

die Offene Frage

Der allgemeinen Formel für den DE (Gl. 2) sind die folgenden Lösungen zu entnehmen, wenn vom Spezialfall der Parallelität der Vektoren v_E und v_S ausgegangen wird:

- Sind die Beträge der Bewegungsvektoren v_E und v_S in Gl. 2 gleich, ist die Relativgeschwindigkeit von Sender und Empfänger gerade null, dann ist die Frequenzverschiebung ω_E/ω_0 gerade eins. Das resultiert aus der Gleichheit von Zähler und Nenner des in der Gleichung gezeigten Bruchs.
- Bewegen sich Sender und Empfänger auf derselben Geraden, sind die Skalarprodukte in der Gleichung Gl. 2 geraden den jeweiligen Beträgen der entsprechenden Geschwindigkeiten, da der Vektor r_{SE0} ein Einheitsvektor ist. Damit ergibt sich der in Gleichung Gl. 1 dargestellte Zusammenhang ohne vektorielle Einfluss.
- Stehen die beiden Geschwindigkeiten v_E und v_S gerade senkrecht zur Verbindungslinie zwischen Sender und Empfänger, werden die in der Gleichung vorhandenen Skalarprodukte $\overrightarrow{v_E} \cdot \overrightarrow{r_{SE0}}$ und $\overrightarrow{v_S} \cdot \overrightarrow{r_{SE0}}$ zu null. Damit wird der DE zu null. Die Geschwindigkeit des Beobachters oder Empfängers des Schalls ist nicht mehr von Belang.

Interessant ist die sich aus den Gleichungen Gl. 2 und Gl. 3 ergebende Aussage, dass ein Beobachter, der mit gleicher Geschwindigkeit und parallel zum Sender durch das schalltransportierende Medium fliegt (vgl. erster Anstrich), keine Frequenzverschiebung erleidet.
Wird die Relativgeschwindigkeit von Sender zum Empfänger hingegen ungleich null, würde der Empfänger eine Frequenzverschiebung registrieren müssen. Dahinter verbirgt sich der Gedanke, dass die Änderung der Geschwindigkeitsverhältnisse auch zu einer Änderung des DE führen muss.
Zwar wird es unumgänglich sein, dass es einen Ort gibt, an welchem der DE zu null wird, weil es über die am Sender vorbeiführenden Orte immer auch einen Wechsel vom positiver zum negativen DE kommt. Warum sollte dieser Ort des Verschiebungswechsels grundsätzlich auf der Orthogonalen zur Senderbewegung liegen? Insbesondere ergibt sich die Frage, wie sich der Sachverhalt darstellt, wenn es sich bei den Bewegungen von Sender und Empfänger nicht um eine Parallelbewegung handelt?
Hierfür gibt es vorerst keinen Hinweis und keine Begründung.

Grundsätzlich ist im Folgenden zu zeigen, dass auch die Gleichungen Gl. 2 und Gl. 3 nicht die allgemeinste Form des DE darstellen. Letztlich fehlt der Einfluss des Mediums in dieser Gleichung völlig. Sollen diese Gleichungen richtig sein, tun sie das nur in einem ruhenden Medium.
Es wird gezeigt, dass eine Transformation der Versuchsverhältnisse in ein Koordinatensystem, in dem das Medium ruht, zu Fehlern in der Bewertung des DE führen kann.

Festlegen des Koordinatensystems

Im Bild 1 ist ein Koordinatensystem angedeutet, in welchem die Verhältnisse, die zu einem DE führen, beschrieben werden können. Wenn zur Beschreibung von Sender- und Empfängergeschwindigkeit Vektoren herangezogen werden, dann beziehen sich diese Vektoren immer auf ein Koordinatensystem.
Die Aufgabe dieses Abschnitts ist es, herauszufinden, ob ein DE unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist. Nur wenn diese Unabhängigkeit nachgewiesen ist, wird der dann abgeleiteten Formel für den DE eine Allgemeingültigkeit zugeschrieben werden können.

Betrachtet man die Verhältnisse, wie sie im Bild 1 dargestellt sind, scheint diese Unabhängigkeit gegeben. Der DE ist lediglich von den Relationen der betrachteten Vektoren abhängig. Wenn hier eine Bewegung des Schallübertragungsmediums keinen Einfluss findet, dann unterstellt das den Schluss, dass diese Bewegung nicht vorhanden ist oder sich ihr Einfluss auf den DE zwischen Sender und Empfänger gerade aufhebt. Der Gedanke der gegenseitigen Kompensation des Einflusses einer Mediumsbewegung wird im ersten Anstrich des Punktes 1 dieser Anlage suggeriert.
Die folgenden Betrachtungen führen zu einem anderen Ergebnis.

Was bedeutet die Aussage, dass ein Medium ruht?

Diese Frage setzt voraus, dass die Ruhe als Relation zu einem Koordinatensystem zu verstehen ist. Sie setzt weiterhin voraus, dass die wegen des thermischen oder eines anderen Einflusses schwingenden Teilchen des Mediums als Teilchen am Ort ihres Schwingungsmittelpunktes aufzufassen sind.
Dann sei das ruhende Medium dadurch bestimmt, dass der Abstand der Teilchen des Mediums als konstant angenommen werden kann. Bei einem im Koordinatensystem K ruhenden Medium haben die Teilchen des Mediums über die Zeit dieselbe Position in diesem Koordinatensystem.
Zur Beschreibung der Effekte auf die Schallausbreitung in einem Medium ist also formal von zwei unterschiedlichen Koordinatensystemen auszugehen. Einerseits befinden sich Sender und Empfänger in einem Koordinatensystem, in welchem deren Bewegung durch die Vektoren $\overrightarrow{v_E}$ und $\overrightarrow{v_E}$ dargestellt werden und andererseits ist das Koordinatensystem zu betrachten, in welchem das Medium ruht. Wollte man den DE berechnen, wären die beiden Koordinatensysteme ineinander zu überführen.
Für den oben beschriebenen Spezialfall im ruhenden Medium, ist das Überführen nicht nötig. Eine Bewegung des Mediums wird gar nicht erst unterstellt.
Für jeden anderen Fall muss aber eine Überführung durchgeführt werden. Dabei bedeutet die Überführung eines Koordinatensystems in das andere, dass ersteres durch Drehung und Verschiebung mit dem zweiten zur Deckung gebracht wird. Inwieweit Drehungen und

Verschiebungen möglich sind und welche Bedingungen daran zu knüpfen sind, wird hier gezeigt:

- Das Koordinatensystem, in welchem die Vektoren für die Sender- und die Empfängerbewegung beschrieben werden ist bedingungslos drehbar und verschiebbar. Die Beschreibung der Bewegungen durch Vektoren brächte zwar bei einer Veränderung des Koordinatensystems Veränderungen der Vektorendarstellungen mit sich. Die Vektoren selbst aber würden in ihrem Betrag und ihrer Beziehung zueinander durch solche Veränderungen unbeeinflusst bleiben.
- Ordnete man jedem Teilchen des Mediums einen Bewegungsvektor zu, würde die eben getroffene Aussage auch für das Koordinatensystem zutreffen, in dem das Medium beschrieben wird.

Jedes Koordinatensystem für sich ist also frei drehbar und verschiebbar. Würde man durch geeignete Drehung und Verschiebung die beiden Koordinatensysteme gerade so wählen, dass ihre Achsen zusammenfallen (siehe Bild 2), dann wären die Vektoren der beiden Koordinatensysteme additiv zu überlagern. Dabei ist zu beachten, dass die Windbewegung v_W bei der Überlagerung negativ eingehen muss, weil zur Überlagerung die Relativbewegung zum Wind und nicht dessen Absolutbewegung heranzuziehen ist.

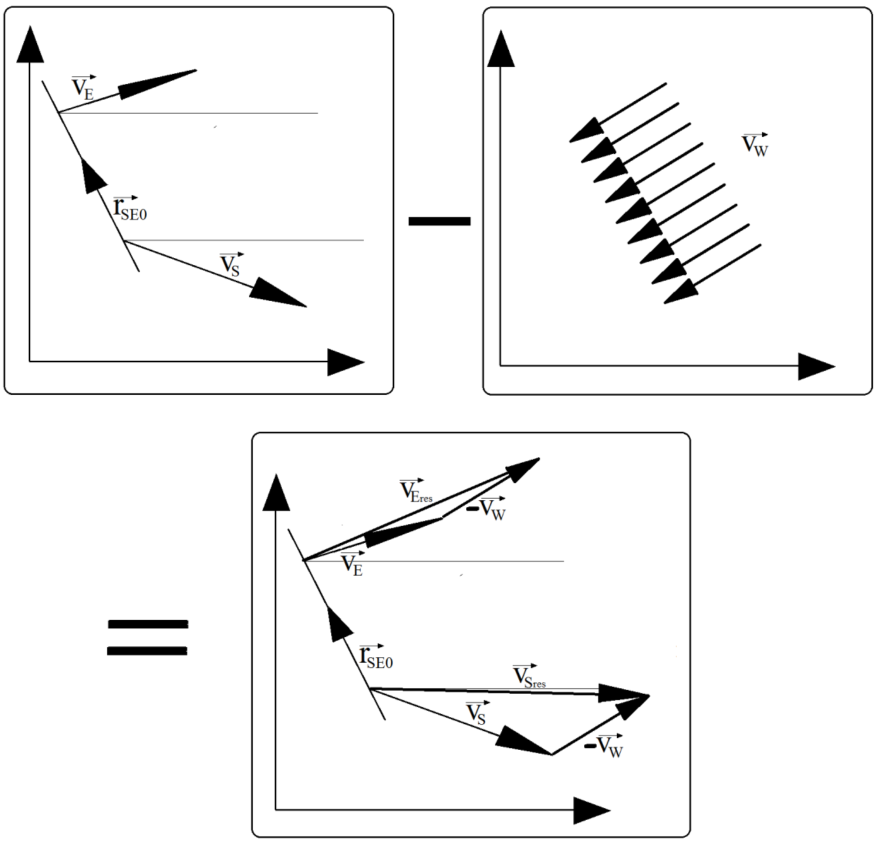

Bild 2: Überlagerung der Mediumsbewegung mit den Bewegungen von Sender und Empfänger

Es sollte nun ersichtlich sein, dass die Windbewegung v_W mit ihrer Wirkung auf den Sender zu v_{Sres} und den Empfänger zu v_{Eres} zu einem vollkommen anderen DE führen muss, als er mit der Formel Gl. 2 zu berechnen gewesen wäre. Dieser Schluss ergibt sich aus der Überlegung, dass die relativen Richtungen dieser resultierenden Vektoren sich gegenüber ihrer Ausgangslage verändern und der Einheitsvektor r_{SE0} unverändert bleibt. Damit werden die Skalarprodukte in der Formel (Gl. 2) andere. Der Erhalt eines identischen Ergebnisses für den DE ist nicht mehr zu erwarten.

Ansatz zur Ermittlung des allgemeinen DE

Da der DE zwingend unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ausfallen muss, wird ein beliebiges Koordinatensystem gewählt. In diesem Koordinatensystem sei ein Sender S, der einen Ton konstanter Frequenz ω_s aussendet. Die Bewegung, die der Sender im System ausführt, ist durch die Gleichung Gl. 4 beschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{S0} \\ y_{S0} \end{pmatrix} + v_S t_s \begin{pmatrix} \cos(\varphi_S) \\ \sin(\varphi_S) \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. 4}$$

In Analogie dazu bewegt sich ein Empfänger E, dessen Frequenz ω_E des von ihm empfangenen Tons durch den DE beeinflusst ist. Seine Bewegung ist durch Gleichung Gl. 5 beschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{E0} \\ y_{E0} \end{pmatrix} + v_E t_E \begin{pmatrix} \cos(\varphi_E) \\ \sin(\varphi_E) \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. 5}$$

Nun ist noch der Wind zu beschreiben. Da der Wind nicht wirklich einen Beginn und ein Ende hat, reicht es, zu seiner Beschreibung die Gleichung Gl. 6 heranzuziehen:

$$\begin{pmatrix} x_W \\ y_W \end{pmatrix} = v_W t_s \begin{pmatrix} \cos(\varphi_W) \\ \sin(\varphi_W) \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. 6}$$

Auffällig in diesen Bewegungsbeschreibungen ist, dass für die verschiedenen Bewegungen unterschiedliche Zeiten t_S und t_E herangezogen werden. Der Grund dafür liegt in der folgenden Betrachtung:

Es ist die Zeitspanne t_S zu berechnen, für die der emittierte Schall den Ort erreicht, an welchem sich der Empfänger nach einer Zeitspanne t_E befindet.
Das bedeutet, dass die Erregung der Teilchen des Mediums über die Schallausbreitung mit der Mediumsbewegung zu überlagern ist. Diese Überlagerung führt dazu, dass man nach der Zeitspanne t_S zu dem Punkt gelangt, an dem die Mediumsteilchen sich gerade in der Phase befinden, die der Erzeugerschwingung zu diesem Zeitpunkt t_S entspricht. Befindet sich der Empfänger an diesem Punkt, ist die Phase der von ihm aufgenommenen Schwingung gerade der in diesem Punkte existierenden Senderschwingung. Es muss nun also noch die Schwingung des Senders mit der Schwingung des Empfängers gleich gesetzt werden. Damit ist erreicht, dass die Dauer t_E, die der Empfänger bis zum Zusammentreffen mit dem erregten

Teilchen benötigt, mit der Dauer t_S, die der Schall bis zu diesem Treffpunkt benötigt, in ein Verhältnis gesetzt wird. Es ergibt sich damit die Gleichsetzung der Schwingungsgleichungen des Senders und des Empfängers:

$$y = A\sin(\omega_S t_s) = A\sin(\omega_E t_E) \qquad \text{Gl. 7}$$

worin A die Amplitude der ungedämpften Schwingung ist.
Es lässt sich ableiten:

$$\frac{\omega_E}{\omega_S} = \frac{t_S}{t_E} \qquad \text{Gl. 8}$$

Der Ansatz, der zum DE führt, ist, dass die Änderung der Empfängerfrequenz zur Senderfrequenz sich aus der Änderung dieses Zeitverhältnisses ergibt.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_S} = \frac{dt_S}{dt_E} \qquad \text{Gl. 9}$$

Dieser Ansatz folgt dem Gedanken, dass die Kreisfrequenz einer Schwingung sich aus der zeitlichen Änderung der Phase ergibt und die Phase, die der Empfänger im Verhältnis zur Phase der Senderschwingung wahrnimmt, gerade von der Veränderung des Laufzeitenverhältnisses abhängt.
Zu beachten ist an dieser Stelle, dass mit t_S und t_E keine Laufgrößen gemeint sind. Es handelt sich dabei vielmehr um Zeitintervalle, die sich aus den Bewegungsabläufen von Sender und Empfänger von einem Startpunkt bis zum Zusammentreffen des Empfängers mit der Schallwelle handelt. Sollten beispielsweise diese Zeitintervalle über den Betrachtungszeitraum konstant bleiben, wie es bei einer relativen Ruhe von Sender und Empfänger der Fall wäre, dann ist offensichtlich die Ableitung des Zeitspannenverhältnisses dt_S/dt_E gleich null und damit ein DE nicht vorhanden.

Betrachtet man die Gleichung Gl. 9, ist diese noch weiter zu vereinfachen. Wegen $\Delta\omega = \omega_E - \omega_S$ folgt:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_S} = \frac{\omega_E - \omega_S}{\omega_S} = \frac{\omega_E}{\omega_S} - 1 \qquad \text{Gl. 10}$$

und es folgt damit aus Gl. 9:

$$\frac{\omega_E}{\omega_S} = \frac{t_S}{t_E} + 1 \qquad \text{Gl. 11}$$

Ist also das Verhältnis der Zeitspannen t_S/t_E bekannt, lässt sich daraus der Einfluss der Geschwindigkeiten als DE berechnen.

Berechnung

Das zu wählende Koordinatensystem ist frei wählbar. Es muss nur ein Koordinatensystem festgelegt werden, um mittels der Vektorrechnung zu einem Ergebnis für den DE zukommen. Vorteilhaft ist es, den Sender als fest im Ursprung dieses Koordinatensystems anzunehmen. Die x-y-Ebene sei mit der Erdoberfläche identisch. Zu ihr bewegen sich der Wind und auch

der Beobachter oder Empfänger des Schalls parallel. Insbesondere sei die Richtung der x-Achse so gelegt, dass sie in die Richtung der Bewegung des Empfängers zeigt.
Damit ist der zu betrachtende Fall 2-diemnsional. Eine Betrachtung in z-Richtung ist unerheblich. Die z-Komponente sei also in allen Vektoren identisch. Das bedeutet, dass sie vernachlässigt werden kann. Wenn damit ein Spezialfall konstruiert wird, dann ist dieser aber für die Belange auf der Erdoberfläche gut anzuwenden. Er umfasst aber den Einfluss Windes, sodass er weiter geht, als die in Gleichung Gl. 2 und Gl. 3 gezeigten Fälle. Sollte die Erweiterung auf den Raum zur Darstellung der allgemeinsten Formel gewünscht sein, ist hier die Herangehensweise aufgezeigt.

Alle Vektoren sind also auf dieses so definierte Koordinatensystem angepasst. Es ergeben sich die folgenden Gleichungen für das gewählte Koordinatensystem aus den Gleichungen Gl. 4; 5 und 6:

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. 12}$$

$$\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{E0} \\ y_{E0} \end{pmatrix} + v_E t_E \begin{pmatrix} \cos(\varphi_E) \\ \sin(\varphi_E) \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. 13}$$

$$\begin{pmatrix} x_W \\ y_W \end{pmatrix} = v_W t_s \begin{pmatrix} \cos(\varphi_W) \\ \sin(\varphi_W) \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. 14}$$

Aus dem Vorgang der Schallausbreitung und der Windgeschwindigkeit ergibt sich eine Ausgangsgleichung unter Anwendung des Bildes 2 wie folgt:
am Punkt P(x; y) folgt die Erregung der Mediumsteilchen durch Ausbreitung des Schalls in einem Ausbreitungswinkel φ minus dem Windeinfluss:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \cdot t_S \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_W \\ y_W \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. 15}$$

Des Weiteren ist die Bewegung des Empfängers des Schalls am Punkt P(x; y) zu betrachten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. 16}$$

Zur Bewertung eines DE ist das Zusammentreffen der beiden Ereignisse durch Gleichsetzung anzunehmen:

$$\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} = c \cdot t_S \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_W \\ y_W \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. 17}$$

Trägt man nun die oben angegebenen Vektoren ein, folgt das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} x_{E0} \\ y_{E0} \end{pmatrix} + v_E t_E \begin{pmatrix} \cos(\varphi_E) \\ \sin(\varphi_E) \end{pmatrix} = c \cdot t_S \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} - v_W t_S \begin{pmatrix} \cos(\varphi_W) \\ \sin(\varphi_W) \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. 18a}$$

bzw.:

$$x_{E0} + v_E t_E \cos(\varphi_E) = c \cdot t_S \cos(\varphi) - v_W t_S \cos(\varphi_W) \qquad \text{Gl. 18b}$$

$$y_{E0} + v_E t_E \sin(\varphi_E) = c \cdot t_S \sin(\varphi) - v_W t_S \sin(\varphi_W) \qquad \text{Gl. 18c}$$

Das Gleichungssystem enthält drei Unbekannte. Das sind einerseits die Zeiten t_E und t_S, die es in Relation zu setzen gilt und andererseits der Winkel φ. Der Winkel φ ist deshalb eine Unbekannte, weil nicht offensichtlich ist, auf welchem Wege sich der Schall ausbreiten muss, um zur Position des Empfängers zu gelangen, sodass er zur rechten Zeit am Punkt P(x; y) ankommt.
Beide Gleichungen (Gl. 18b und 18c) werden nach t_S aufgelöst:

$$t_S = \frac{x_{E0}+v_E t_E \cos(\varphi_E)}{c\cdot\cos(\varphi)-v_W\cos(\varphi_W)} = \frac{y_{E0}+v_E t_E \sin(\varphi_E)}{c\cdot\sin(\varphi)-v_W\sin(\varphi_W)} \qquad \text{Gl. 19}$$

Aus den rechten beiden Termen der Gleichung Gl. 19 folgt:

$$\left(x_{E0}+v_E t_E\cos(\varphi_E)\right)\left(c\cdot\sin(\varphi)-v_W\sin(\varphi_W)\right) =$$
$$\left(c\cdot\cos(\varphi)-v_W\cos(\varphi_W)\right)\left(y_{E0}+v_E t_E\sin(\varphi_E)\right) \qquad \text{Gl. 20}$$

Durch Ausmultiplizieren wird daraus:

$$x_{E0}c\cdot\sin(\varphi)+v_E t_E c\cdot\cos(\varphi_E)\sin(\varphi)-x_{E0}v_W\sin(\varphi_W)-v_W v_E t_E\cos(\varphi_E)\sin(\varphi_W) =$$
$$y_{E0}c\cdot\cos(\varphi)+v_E t_E c\cdot\sin(\varphi_E)\cos(\varphi)-y_{E0}v_W\cos(\varphi_W)-v_W v_E t_E\sin(\varphi_E)\cos(\varphi_W) \qquad \text{Gl. 21a}$$

woraus nach Umstellen nach der Winkelfunktion von φ folgt:

$$c\left(x_{E0}+v_E t_E\cos(\varphi_E)\right)\sin(\varphi)-c\left(y_{E0}+v_E t_E c\sin(\varphi_E)\right)\cos(\varphi) =$$
$$v_W\left(x_{E0}+v_E t_E\cos(\varphi_E)\right)\sin(\varphi_W)-v_W\left(y_{E0}+v_E t_E\sin(\varphi_E)\right)\cos(\varphi_W) \qquad \text{Gl. 21b}$$

bzw. bei Division durch den Koeffizienten von sin(φ):

$$\sin(\varphi)-\frac{\left(y_{E0}+v_E t_E\sin(\varphi_E)\right)}{\left(x_{E0}+v_E t_E\cos(\varphi_E)\right)}\cos(\varphi) = \frac{v_W}{c}\left(\sin(\varphi_W)-\frac{\left(y_{E0}+v_E t_E\sin(\varphi_E)\right)}{\left(x_{E0}+v_E t_E\cos(\varphi_E)\right)}\cos(\varphi_W)\right) \qquad \text{Gl. 21c}$$

Der besseren Übersicht halber wird an dieser Stelle festgelegt:

$$h_1 = \frac{\left(y_{E0}+v_E t_E\sin(\varphi_E)\right)}{\left(x_{E0}+v_E t_E\cos(\varphi_E)\right)} \text{ und}$$

$$h_2 = \frac{v_W}{c}\left(\sin(\varphi_W)-h_1\cos(\varphi_W)\right)$$

Daraus folgt dann die Umschreibung der Gleichung Gl. 21.c zu:

$$\sin(\varphi)-h_1\cos(\varphi) = h_2 \qquad \text{Gl. 21d}$$

und wegen $\sin^2(\varphi) = 1-\cos^2(\varphi)$
folgt dann:

$$1-\cos^2(\varphi) = \left(h_2+h_1\cos(\varphi)\right)^2 \qquad \text{Gl. 22a}$$

Woraus sich durch Ausmultiplizieren und Umstellen ergibt:

$$1-\cos^2(\varphi) = h_2^2+2h_1h_2\cos(\varphi)+h_1^2\cos^2(\varphi) \qquad \text{Gl. 22b}$$

bzw.:

$$0 = (h_1^2+1)\cos^2(\varphi)+2h_1h_2\cos(\varphi)+h_2^2-1 \qquad \text{Gl. 22c}$$

Damit ist über die Lösungsformel der quadratischen Gleichung der Cosinus des Winkels φ als Funktion der Zeitspanne t_E darzustellen.

$$h_3 = \cos(\varphi)_{1;2} = -\frac{h_1 h_2}{h_1^2+1} \pm \sqrt{\left(\frac{h_1 h_2}{h_1^2+1}\right)^2 - \frac{h_2^2-1}{h_1^2+1}} \qquad \text{Gl. 22d}$$

Diese Formel ist noch zu vereinfachen:

$$h_3 = \cos(\varphi)_{1;2} = -\frac{h_1 h_2}{h_1^2+1} \pm \frac{1}{h_1^2+1}\sqrt{(h_1 h_2)^2 - (h_1^2+1)(h_2^2-1)} \qquad \text{Gl. 22e}$$

$$h_3 = \cos(\varphi)_{1;2} = -\frac{h_1 h_2}{h_1^2+1} \pm \frac{1}{h_1^2+1}\sqrt{(h_1 h_2)^2 - (h_1 h_2)^2 + h_1^2 - h_2^2 + 1} \qquad \text{Gl. 22f}$$

$$h_3 = \cos(\varphi)_{1;2} = -\frac{h_1 h_2}{h_1^2+1} \pm \frac{1}{h_1^2+1}\sqrt{h_1^2 - h_2^2 + 1} \qquad \text{Gl. 22g}$$

$$h_3 = \cos(\varphi)_{1;2} = \frac{1}{h_1^2+1}\left(-h_1 h_2 \pm \sqrt{h_1^2 - h_2^2 + 1}\right) \qquad \text{Gl. 22h}$$

Setzte man diesen Wert für den cos(φ) in die Gleichung Gl. 19 ein, ergäbe sich ein sehr umfangreicher Term, in welchem das t_E in Brüchen, Wurzeln und diversen Potenzen versteckt wäre. Hier erscheint es vorteilhaft, die Formel digital umzusetzen und mithilfe einer Excel-Tabelle zu berechnen.

Darstellung in einer Excel-Tabelle

Zur Berechnung ist die Formel:

$$t_S = \frac{x_{E0} + v_E t_E \cos(\varphi_E)}{c \cdot \cos(\varphi) - v_W \cos(\varphi_W)} \qquad \text{Gl. 19}$$

heranzuziehen.

Interessanter Weise sind scheinbar nicht alle Werte erforderlich, die zur Beschreibung der beteiligten Vektoren (siehe Bild 2) zu beachten sind. Doch dieser Schein trügt, weil diese Werte in den Hilfsgrößen h_i stecken und in die Berechnung des cos(φ) eingehen.

Es ist eine Tabelle aufzubauen, die diese Formel nachempfindet, sodass daraus die Ableitung nach Gleichung Gl. 11 gebildet werden kann.

Zu diesem Zecke wird eine Excel-Tabelle folgenden Aussehens aufgebaut:

	A	B	C	D	E	F	G
5	Vektoren	Anfangspunkt		Richtung	Wert		
6		x_0	y_0	φ	v		
7		[m]	[m]	[°]	[m/s]		
8	Sender	0	0	0	0		
9	Empfänger	-80	30	30	50		
10	Wind	0	0	20	50		
11							
12	Schallgeschwindigkeit	340	[m/s]				

13							
14	Δt	0,01	[s]	1,09	1,17	0,00	1,00
15	orthogonale Pos.	1,09	[m]	1,09	0,85	3,19	1,00

Tabelle 1: Eingabewerte für die Berechnung des akustischen DE

In diesen Tabellenbereich können die Werte eingegeben werden, die den DE beeinflussen sollen. Dabei sind die hellgrau unterlegten Felder mit null oder nicht zu belegen, weil diese Werte auch nicht in die Berechnung eingehen. Für die anderen Felder sind sinnfällige Werte zu benutzen, weil ansonsten die eingegebenen Formeln ggf. zu unsachlichen Ergebnissen führen werden.

Das Feld „B15“ ist gelb unterlegt. In diesem Feld ist eine Formel zur Berechnung der Zeit t_E eingefügt, zu der der Empfänger gerade den kürzesten Abstand zum Sender hat (siehe Anl. 1). Das ist der Zeitpunkt, bei dem die Verbindungslinie Sender-Empfänger gerade senkrecht auf die Bewegungsrichtung des Empfängers schaut. Das sollte der Zeitpunkt sein, an welchem nach den obigen Gleichungen Gl.12 und Gl. 3 der DE zu null werden sollte.

Die Feldergruppe „D14:G15“ enthält Hilfsgrößen, die zur Darstellung von Linien im Diagramm (siehe Bild 3) benötigt werden.

	A	B	C	D	E	F	G	H
17	t_E	Nenner	h1	h2	cos(φ)	Nenner	tS	dt_S/dt_E
18	0	-80	-0,25	0,08429	0,98672	300,846	-0,26591	
19	0,021	-79,16	-0,25265	0,08456	0,98635	300,719	-0,26323	1,12766

Tabelle 2: Berechnungsbereich für den DE

In den Berechnungsbereich sind die folgenden Formeln einzutragen und nach der gewünschten Größe des Bereichs nach unten zu kopieren.

Spalte A: Die Laufgröße t_E:

- In Zeile 18 wird eine null eingetragen. Eine andere Zeit dort einzutragen, bedeutete, dass der betrachtete Prozess in einem anderen Zeitfenster gezeichnet würde.
- Ab der Zeile 19 ist die Formel „=A18+$B$14“ einzutragen. Damit wird der Prozess in Schritten von „B14“ betrachtet.

Spalte B: Zähler der Gleichung Gl. 19:

In Zeile 18 der Spalte B wird die Formel „=$B$9+$E$9*A18*COS($D$9/180*PI())“ eingeschrieben. Sie entspricht dem Zähler der gesuchten Formel.

Spalte C: Hilfsgröße 1:

Die Formel „=($C$9+$E$9*A18*SIN($D$9/180*PI()))/B18“ zur Berechnung der Hilfsgröße h_1 ist entsprechend einzutragen.

Spalte D: Hilfsgröße h_2:

Analog gilt das für die Formel „=$E$10/$B$12*(SIN($D$10/180*PI())-C18*COS($D$10/180*PI()))“, die die Hilfsgröße h_2 beschreibt.

Spalte E: Hilfsgröße h_3:

Die Hilfsgröße h_3 stellt den Kosinus des Winkels dar, in welchen sich der Schall ausbreiten muss, um nach einer Zeitspanne t_S gerade an der Stelle zu sein, an welcher der Empfänger des Schalls nach der Zeit t_E ist. Die Formel dazu ist „=WENN(ODER(D18<0;C18-D18>0);(-C18*D18-WURZEL(C18*C18-D18*D18+1))/(C18*C18+1);(-C18*D18+WURZEL(C18*C18-D18*D18+1))/(C18*C18+1))“.

Hier bedeutet die Wenn-Funktion in der Formel, dass unter bestimmten Bedingungen zu entscheiden ist, ob der positive oder der negative Wert der Wurzel heranzuziehen ist.

Es sind aus mathematischer Sicht nicht alle Eventualitäten abgefangen, weshalb auch oben die Forderung nach sinnfälligen Eingaben erhoben wurde.

Spalte F: Nenner:

Zur Berechnung des Nenners der Gleichung Gl. 19 ist die Formel: „=$B$12*E18-$E$10*COS($D$10/180*PI())“ heranzuziehen.

Spalte G: Zeitspanne t_S:

Bei Division von Zähler zu Nenner („=B18/F18“) ergibt sich die benannte Zeitspanne t_S nach der Gleichung Gl. 19

Spalte H: DE

Der DE ergibt sich nach der Gleichung Gl. 11. Die dafür benutzte Formel lautet: „=1+(G19-G18)/(A19-A18)“. Diese Formel ist in Zeile 19 zu schreiben, weil sie in der Zeile 18 zu keinem numerischen Wert führen kann.

Damit ist die Tabelle aufgebaut und kann durch Einfügen eines Diagramms visualisiert werden. Die grüne horizontale Linie stellt den Umkehrpunkt, wo der DE gerade nicht existiert. Die grüne Senkrechte Linie zeigt den Zeitpunkt t_{E0}, wo der Abstand Sender-Empfänger minimal ist.

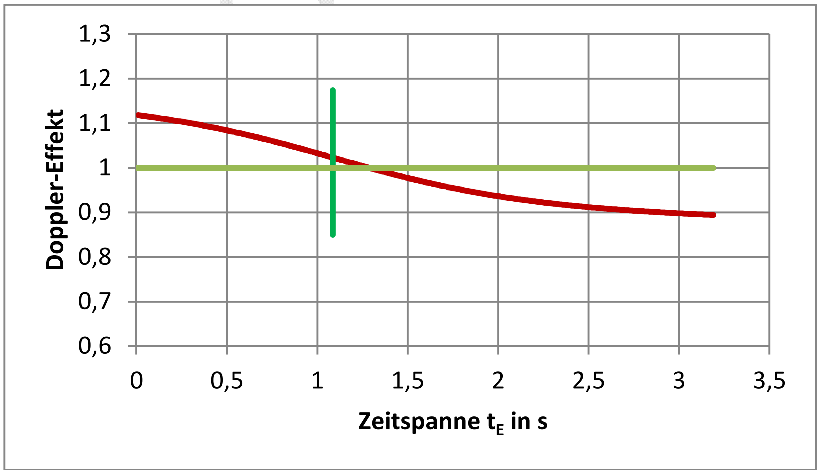

Bild 3: Auswertung des DE mit den in Tab1 eingegeben Daten

Anlagen

Anl. 1: kürzeste Entfernung von Sender und Empfänger

Üblicherweise wird in der Schulphysik von einem einfachen Fall der Erzeugung des DE ausgegangen. Man denkt sich ein Koordinatensystem, dessen x-Achse parallel zur Bahnschiene verläuft und lässt den Zug als Sender eines Pfeifsignals auf der Schiene langfahren.
In dieser Anlage wird von einem allgemeinen Fall ausgegangen, sodass keine Vereinfachungen vorgenommen werden dürfen.

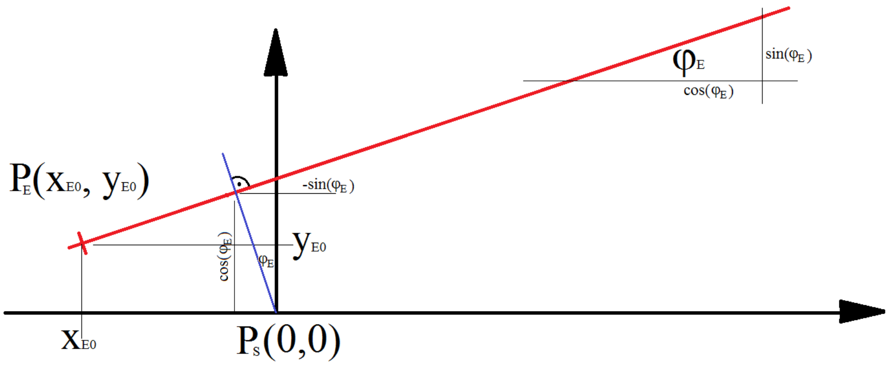

Bild A1.1: Berechnung der kürzesten Entfernung zwischen Sender und Empfänger

In Bild A1.1 sei der allgemeinste Fall zur Darstellung des DE nachempfunden. Dabei ist das Koordinatensystem so gelegt, dass der Sender im Koordinatenursprung $K_0 = P_S$ verbleibt. Der Empfänger starte seine geradlinige und unbeschleunigte Bewegung zum Zeitpunkt $t_{E0} = 0$ im Punkt P_E. Die Bewegung des Empfängers ist durch die rote Linie visualisiert.

Die sich ergebende Frage ist, zu welchem Zeitpunkt t befindet sich der Empfänger in dem Punkt, der dem Fußpunkt der blauen Verbindungslinie entspricht. Die blaue Verbindungslinie ist das Lot des Punktes P_S auf die rote Bewegungslinie des Empfängers.
Dass in diese Skizze (Bild A1.1) die Windrichtung keinen Eingang findet, ist insofern richtig, da der Wind für die Relativbeziehung zwischen Sender und Empfänger keine Rolle spielt.

Aufstellend der Vektorgleichungen:
Die Gleichung des Empfängers als Funktion der Zeit t_E (rote Linie) ist:

$$\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{E0} \\ y_{E0} \end{pmatrix} + v_E t_E \begin{pmatrix} \cos(\varphi_E) \\ \sin(\varphi_E) \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. A1.1}$$

Die Gleichung des Lots (blaue Linie) ergibt sich dann aus der Skizze (Bild A.1.1):

$$\begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_E) \\ \cos(\varphi_E) \end{pmatrix} \qquad \text{Gl. A1.2}$$

Der Fußpunkt des Lots ergibt sich aus der Gleichsetzung dieser beiden Gleichungen Gl. A1.1 und Gl. A1.2 und aufstellen des folgenden Gleichungssystems:

$$x_{E0} + v_E t_E \cos(\varphi_E) = -\mu \sin(\varphi_E) \qquad \text{Gl. A1.3}$$

$$y_{E0} + v_E t_E \sin(\varphi_E) = \mu \cos(\varphi_E) \qquad \text{Gl. A1.4}$$

Die Auflösung erfolgt im ersten Schritt durch Extraktion des μ aus Gleichung Gl. A1.3:

$$\mu = -\frac{x_{E0} + v_E t_E \cos(\varphi_E)}{\sin(\varphi_E)} \qquad \text{Gl. A1.5}$$

Dieses μ ist nun in Gleichung GL. A.4 einzusetzen:

$$y_{E0} + v_E t_E \sin(\varphi_E) = -\cos(\varphi_E)\frac{x_{E0} + v_E t_E \cos(\varphi_E)}{\sin(\varphi_E)} \qquad \text{Gl. A1.6}$$

Die Umstellung nach der gesuchten Zeit t_E erfolgt in 3 Schritten:

$$y_{E0} + \frac{\cos(\varphi_E)}{\sin(\varphi_E)} x_{E0} = -v_E t_E \left[\frac{\cos^2(\varphi_E)}{\sin(\varphi_E)} + \sin(\varphi_E)\right] \qquad \text{Gl. A1.7}$$

$$t_E = -\frac{1}{v_E} \frac{y_{E0} + \frac{\cos(\varphi_E)}{\sin(\varphi_E)} x_{E0}}{\frac{\cos^2(\varphi_E)}{\sin(\varphi_E)} + \sin(\varphi_E)} \qquad \text{Gl. A1.8}$$

$$t_E = -\frac{1}{v_E}\left(y_{E0}\sin(\varphi_E) + x_{E0}\cos(\varphi_E)\right) \qquad \text{Gl. A1.9}$$

Literatur

[Bau] Bauer, W,; Benenson, W.; Westfall, G. D.: Dopplereffekt - Allgemeiner Fall
Verlag Harri Deutsch AG Thun (Schweiz) (1999) cited 06.05.2018
https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/kap14/cd408.htm

[Dop] Doppler, Ch.: Ueber das farbige Licht der Doppelsterne, und einiger anderer Gestirne des Himmels
Borrosch & Andrè Prag 1842
https://opacplus.bsb-muenchen.de/metaopac/search?View=default&db=100&id=BV014047463

[Kra] Krambeer, H.: Formeln zum Doppler-Effekt
Universität Rostock Institut für Allgemeine Elektrotechnik Rostock cited 09.02.2009
http://139.30.91.136/lehre/Doppler-Effekt.pdf

[Wan] Wander, D.: Geschwindigkeitsmessung mittels akustischem Dopplereffekt
Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum Bad Bergzabern (29.12.2012) cited 03.05.2018
https://www.dgzfp.de/Portals/24/IZ/PDF/Jugend%20forscht/RW%20Landau%202013.pdf