Energie im Kraftfeld

R. Sydow, Niederfinow (Deutschland)
(2022)

abstrakt: die bekannten Formeln für die kinetische und die potentielle Energie gelten für schwache Gravitationsfelder. In diesen Gravitationsfeldern geht man davon aus, dass die Gravitationsbeschleunigung über den betrachteten Höhenbereich als unveränderlich angenommen werden kann.

Für die erdnahen Prozesse im Gravitationsfeld der Erde mag das auch mit guter Annäherung gegeben sein. Doch sollte man für Überlegungen zur Relativitätstheorie etwas genauer sein.

Es werden die Formeln für diese Energien genauer unter die Lupe genommen und für die erforderlichen Betrachtungen zur Verfügung gestellt.

Quellenangabe: Sydow, R. Energie im Kraftfeld, Niederfinow (Deutschland) 04.06.2022
https://rolfswelt.de/physik/#mechanik-energie-im-kraftfeld
Revision: 1.2.0.2 vom 16.07.2023

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen

RT Relativitätstheorie
SRT spezielle Relativitätstheorie

Einleitung

Wenn der Titel auch sehr allgemein gehalten ist, so soll es in diesem Artikel lediglich um die Energie im Gravitationsfeld gehen. Sicherlich sind die Gedanken auf andere Felder übertragbar, aber die Randbedingungen sind dann entsprechend den Gegebenheiten anzupassen.
Wenn es also um Gravitationsfelder geht, scheint es überflüssig, sich mit diesem Thema auseinander zu setzen. Seit Newton ist dazu alles gesagt. Es gibt Formelsammlungen in ausreichender Zahl, in denen zutreffende Gleichungen zu finden sind. Es scheint überflüssig, diese Quellen zu recherchieren. Sie offerieren üblicherweise nur das bekannte und schon in der Schule gelernte Wissen.
Beschäftigt man sich aber im Rahmen der RT mit den Prozessen, die sich im Gravitationsfeld abspielen, ergeben sich Fragestellungen, die genauer unter die Lupe zu nehmen sind.

Kinetische Energie

Sicherlich ist die Formel für die kinetische Energie allgemeines Schulwissen und überall zu finden:
$$W_{kin} = \frac{m}{2} v^2 \qquad \text{Gl. 1}$$
Diese Formel wird immer dann herangezogen, wenn es um die Darstellung des Energieanteils geht, der aus einer Geschwindigkeit resultiert.
Warum sich hier eine Frage auftut? Na es gibt eine Formel, die hiervon abweicht und dennoch eine kinetische Energie darstellt. Das ist die berühmte einsteinsche Formel:
$$E = mc^2 \qquad \text{Gl. 2}$$
Wir finden in ihr nur die Masse m, eine im Quadrat auftretende Geschwindigkeit und keinen Koeffizient von 0,5 wieder. Die Geschwindigkeit ist c (die Lichtgeschwindigkeit). Warum es für das Licht zu einer Abweichung der allgemeinen Gleichung der kinetischen Energie kommt, bzw. welcher Unterschied in der Interpretation der Gleichungen zu machen ist, sei hier nicht untersucht. Es soll nur durch eine Herleitung nachgewiesen werden, dass für die hier angestellten Betrachtungen die Gleichung 1 Anwendung finden muss.

Ausgangspunkt ist der Ansatz, dass die Energie definitionsgemäß das Produkt aus Kraft mal Weg ist:
$$W = Fs\,. \qquad \text{Gl. 3}$$
Da nicht zwingend von gleichförmigen oder gleichmäßig veränderlichen Bewegungen ausgegangen werden kann, ist die Integralform dieser Gleichung zu verwenden. Die Energie ist damit das Integral der Kraft über alle Wegdifferentiale:
$$W = \int F\,ds\,. \qquad \text{Gl. 4}$$
Nach dem newtonschen Gesetz ist die Kraft als Momentangröße ersetzbar durch:

$F = m\,a\,,$ Gl. 5

worin die Masse m als Konstante anzunehmen ist und die Beschleunigung gerade die Momentangröße der zeitabhängigen Beschleunigung sein muss.

Wegen a = v/t folgt für den Ausdruck a als Momentangröße:

$a = \frac{dv}{dt}\,.$ Gl. 6

Führt man diese Zusammenhänge in eine Gleichung, findet sich:

$W = \int m \frac{dv}{dt}\, ds = m \int dv \frac{ds}{dt}\,.$ Gl. 7

Mit der Definition der Geschwindigkeit als Änderung des Weges nach der Zeit, ist der Quotient ds/dt durch die Momentangeschwindigkeit v ersetzbar. Es folgt:

$W = m \int v\, dv = m \frac{v^2}{2}\,,$ Gl. 8

was der eingangs angegebenen Gleichung Gl. 1 entspricht.

Zu beachten ist allerdings, dass diese Formel grundsätzlich nur für eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_a = 0$ gilt. Hätte man das Integral (Gl. 8) als bestimmtes Integral gelöst, ergäbe sich aus der Geschwindigkeitsänderung eine kinetische Energieänderung:

$\Delta W_{kin} = m \int_{v_a}^{v_e} v\, dv = \frac{m}{2}\left(v_e^2 - v_a^2\right)\,.$ Gl. 9a

Diese Gleichung Gl. 9a kann noch weiter vereinfacht werden, wenn man die Geschwindigkeitsänderung Δv betrachtet, die erforderlich ist, um eine bestimmte Änderung der kinetischen Energie ΔW_{kin} hervorzurufen. Dabei ist immer im Blickfeld zu behalten, dass diese Änderung der kinetischen Energie auch bedeutet, dass man dem betrachteten Körper der Masse m auf irgendeine Weise diese Energie zuführen oder entziehen muss, um dann die Geschwindigkeitsänderung Δv zu erreichen.

Es folgt für $\Delta v = v_e - v_a$ die abgewandelte Form der Gleichung Gl. 9a:

$\Delta W_{kin} = \frac{m}{2}\left(v_e^2 - v_a^2\right) = \frac{m}{2}\left((\Delta v + v_a)^2 - v_a^2\right)\,.$ Gl. 9b

bzw.:

$\Delta W_{kin} = \frac{m}{2}\left(\Delta v^2 + 2\Delta v v_a\right)\,.$ Gl. 9c

Löste man diese Gleichung Gl. 9c nach der Geschwindigkeitsänderung Δv auf, ergibt sich der Zusammenhang:

$0 = \Delta v^2 + 2\Delta v v_a - \frac{2}{m}\Delta W_{kin}$ Gl. 10a

$\Delta v_{1;2} = -v_a \pm \sqrt{v_a^2 + \frac{2}{m}\Delta W_{kin}}$ Gl. 10b

In dieser Gleichung ist für einen beschleunigten Prozess lediglich die positive Wurzel relevant. Eine negative Wurzel würde auch negative Δv zur Folge haben, was einen Bremsvorgang dokumentierte.

Die Gleichung Gl. 10b drückt also aus, dass die Geschwindigkeitsänderung Δv einer Masse m bei Zuführung einer bestimmten Energiemenge ΔW_{kin} in Anhängigkeit der Anfangsgeschwindigkeit v_a unterschiedlich ausfallen wird.
Damit lässt sich die Gleichung für einen willkürlich angenommenen $\frac{2}{m}\Delta W_{kin}$-Wert grafisch darstellen:

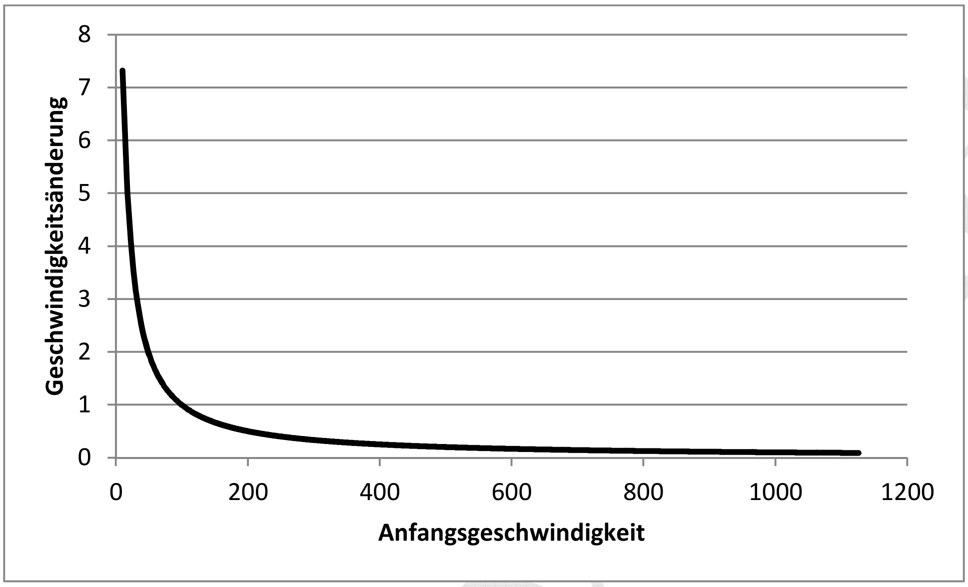

Bild 1: Beispiel der Geschwindigkeitszunahme bei Zuführung eines konstanten Energiebeitrages in Abhängigkeit der betrachteten Anfangsgeschwindigkeit

Dem Bild 1 ist zu entnehmen, dass bei höheren Anfangsgeschwindigkeiten die Zuführung eines Energiebeitrages zu geringeren Geschwindigkeitänderungen führen wird.
Nimmt man also eine willkürlich anzunehmende Energie, die dem betrachteten Objekt zugeführt werden soll, sodass sich dessen Geschwindigkeit verändert, dann wird diese Geschwindigkeitsänderung von der Anfangsgeschwindigkeit dieses Prozesses abhängen.
Dass bei konstanter Energiezufuhr diese Geschwindigkeitsänderung für große Anfangsgeschwindigkeiten v_a gegen null geht, ist offensichtlich. Die Auswirkungen dieser Erkenntnis und deren Parallelen zur SRT sind noch zu diskutieren.
Interessant wird sein, die Sache relativistisch zu betrachten. Das endete in dem Extremfall, dass für die Anfangsgeschwindigkeit $v_a = c$ keine Energie dem System zugefügt werden kann.
Zur Begründung eine Masseerhöhung oder eine Wechselwirkungsabschwächung heranzuziehen ist jedenfalls möglich (vgl. [Kau] S. 272 ff.).

Energie bei Lichtgeschwindigkeit

Es ist dem aufmerksamen Leser sicherlich schon aufgefallen, dass es eine Diskrepanz in den Formeln für die kinetische Energie und der Energie des Lichts gibt. Während die erstere immer mit m/2 anfängt und dann ein Geschwindigkeitsquadrat anfügt, ist es beim Licht einfach mc^2, das den Energiegehalt ausdrückt.
Die Erklärung dafür ist eher simpel.

Während man sich in der klassischen Mechanik die Geschwindigkeit einer Masse aus der Aufsummierung all ihrer erhaltener Impulse I = mv erklären kann, muss bei der relativistischen Betrachtung davon ausgegangen werden, dass die relativistische Masse in diesem Impuls durch den Relativitätskoeffizienten veränderlich ist.
klassische Betrachtung:

$$W_{kin} = \int mv\,dv \qquad \text{Gl. 11}$$

woraus sich sofort die Gleichung für die kinetische Energie ergibt:

$$W_{kin} = \frac{m}{2}v^2 \qquad \text{Gl. 12}$$

relativistischer Ansatz:

$$W_{kin} = \int \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} v\,dv = cm \int \frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}}\,dv \qquad \text{Gl. 13}$$

woraus sich nach [Bro] S. 307 Gl. 165 ergibt:

$$W_{kin} = -cm\sqrt{c^2 - v^2} + C^* \qquad \text{Gl. 14}$$

Die Integrationskonstante ist leicht zu bestimmen weil W_{kin} für v = 0 ebenfalls zu null werden muss. Damit ergibt sich $C^* = mc^2$.
Diese Konstante in Gleichung Gl. 14 eingesetzt ergibt dann:

$$W_{kin} = -cm\sqrt{c^2 - v^2} + mc^2 = mc^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \qquad \text{Gl. 15}$$

Wie vorausgesetzt ergibt sich so für v = 0 der Wert für W_{kin} zu null.
Unterstellt man aber nun, dass die Masse die Lichtgeschwindigkeit v = c erreichen kann, dann folgt für die kinetische Energie $W_{kin} = mc^2$.
Da eine Masse diese Energie nicht erreichen wird, ist diese Berechnung der Energie des Lichts vorbehalten.

Potentielle Energie

Nun könnte sich die Frage aus Analogiebetrachtung stellen, warum bei der potentiellen Energie nicht ebenfalls so eine Gleichung mit einer 2 im Nenner entsteht. Der Ansatz für die Ermittlung der potentiellen Energie kann nur derselbe sein, der es auch schon im vorangegangenen Absatz war. Diese Frage sei hier untersucht und von der bereits genutzten Formel ausgegangen:

$W = \int F\,ds$. Gl. 4

Auch hier ist in die Betrachtungen die sich über den Prozess ändernde Beschleunigung einzubeziehen:

$F = m\,a$. Gl. 5

Diese resultiere aus der Höhenänderung in einem radialen Feld. Wegen des Abstandsquadratgesetzes wird sich die Beschleunigung in einem solchen durch eine Punktquelle initiierten Feld wie folgt verhalten:

$a = \frac{a_0 R^2}{r^2}$ Gl. 16

Hier sei a_0 eine bekannte Beschleunigung im Abstand R zum Mittelpunkt der Quelle des betrachteten Gravitationsfeldes (vorzugsweise an der Oberfläche der betrachteten, das Gravitationsfeld erzeugenden Masse). Mit r ist ein beliebiger Abstand außerhalb dieser Masse zum Mittelpunkt bezeichnet (r > R).

Bemerkenswert an dieser Stelle ist, dass der Grund für die Beschleunigung unbenannt ist. Ob es sich also um ein Gravitationsfeld oder ein durch Elektrizität oder Magnetismus hervorgerufenes Feld handelt, ist vollkommen unbenommen. Wichtig ist ausschließlich, dass die Ursache als eine punktförmige angenommen werden kann.

Das bestimmte Integral für die potentielle Energie ermittelt sich über den Weg r wie folgt:

$\Delta W_{pot} = \int_{r_u}^{r_o} F\,dr = m \int_{r_u}^{r_o} a\,dr = m a_0 R^2 \int_{r_u}^{r_o} \frac{1}{r^2}\,dr$ Gl. 17

Dabei sind r_u und r_o die untere und obere Grenze des betrachteten Bereiches, über den eine Hubarbeit ΔW_{pot} geleistet werden soll.

Dieses Integral aufgelöst ergibt:

$\Delta W_{pot} = -m a_0 R^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_u}\right)$. Gl. 18

Diese Gleichung weicht von der aus der Schule bekannten Formel etwas ab:

$W_{pot} = mgh$ (vgl. [Mes] S. 29) Gl. 19

worin g der Fallbeschleunigung in der betrachteten Höhe war. Will man von der Gleichung Gl. 13 auf diese Formel kommen, ist das r_o gegen den Ausdruck $r_u + h$ zu ersetzen:

$\Delta W_{pot} = -m a_0 R^2 \left(\frac{1}{r_u + h} - \frac{1}{r_u}\right) = m a_0 R^2 \frac{h}{r_u (r_u + h)}$. Gl. 20

Unterstellt man, dass das h klein gegen r_u ist und damit im Nenner vernachlässigt werden kann und betrachtet man weiterhin den Ausdruck aus Gleichung Gl. 16 mit a = g, ergibt sich die gewünschte Formel.

$\Delta W_{pot} = ma_0 \frac{R^2}{r_u^2} h = mgh.$ Gl. 21

Der Rechenschritt nach dem zweiten Gleichheitszeichen in dieser Gleichung unterstellt einfach, dass der Radius R, an welchem die Gravitationsbeschleunigung a_0 herrschen soll, gerade mit dem Radius r_u übereinstimme, an welchem der Hubbereich zum Leisten der Hubarbeit beginnt. Das ist soweit richtig, weil über die Beziehung nach Gleichung Gl. 16 das Produkt aus der Beschleunigung in einem Abstand zur Punktquelle mal dem Quadrat des Abstandes eine Konstante ist. Somit kann nach diesem Abstandsquadratgesetz der Wert $g = a_0$ für die Beschleunigung am Orte $R = r_u$ angenommen werden.
Die Gleichung Gl. 21 ist also eine Näherung für die zu leistende Hubarbeit über Bereiche h, wo von einer gleichbleibenden Beschleunigung über den betrachteten Bereich h ausgegangen werden kann.

Die sich aus dieser Näherung ergebende Suggestion ist die Annahme, dass die potentielle Energie mit zunehmender Höhe steigt. Von der Definition her wird aber die potentielle Energie im Unendlichen mit null angenommen. Der Grund dafür liegt einfach in der Herleitung der potentiellen Energie über die Integration der von der punktförmigen Ursache ausgehenden Beschleunigung. Die ergibt sich nämlich für zwei Radien r_u und r_o im Unendlichen in Analogie zur Gleichung Gl. 18 zu:

$W_{pot} = -ma_0R^2\frac{1}{\infty} = 0$. Gl. 22

Diese Gleichung Gl. 17 ist einfach nur so zu interpretieren, dass es im Unendlichen aufgrund der fehlenden Beschleunigung nicht möglich ist, überhaupt Hubarbeit zu leisten.

Es ist also wichtig, die potentielle Energie W_{pot}, die einer Masse am Ort im Kraftfeld zugesprochen wird, von der potentiellen Energie ΔW_{pot} zu unterscheiden, die zu leisten ist, wenn diese Masse eine Änderung des Ortes im Kraftfeld erfährt.

gesamte Energie im Kreisbeschleuniger

Der allgemeine Zusammenhang in der Mechanik zwischen den Energien eines Körpers ist:

$W_{ges} = W_{kin} + W_{pot}$ ([Hei]) Gl. 23

Er drückt aus, dass in einem geschlossenen System der Mechanik nur die beiden Energieformen der kinetischen und der potentiellen Energie zu betrachten sind. Diese beiden können ineinander umgewandelt werden. Das erfolgt beispielsweise beim Fall einer Masse auf die Erde.
In einem Kreisbeschleuniger (z. B. bei Speicherringexperimenten) unterliegt die Betrachtung einer einschränkenden Bedingung. Solange die Bewegung des betrachteten Objektes eine Kreisbewegung ist, stehen die beiden Energieformen in einem berechenbaren Verhältnis.
Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen sind die Beziehungen für die Energieformen:

- $W_{kin} = \frac{m}{2} v^2$ Gl. 1
- $W_{pot} = \gamma \frac{Mm}{r}$ (vgl. [Hei]) Gl. 24

worin in der Gleichung für die potentielle Energie das γ für einen beliebigen, das Potential erzeugenden Proportionalitätsfaktor steht, der sich aus einem elektrischen, magnetischen oder Gravitationsfeld ergibt.

Des Weiteren ist die einschränkende Bedingung zu beachten, dass in einem Kreisbeschleuniger die anziehende Zentripetalkraft der nach außen wirkenden Zentrifugal oder Fliehkraft vom Betrag gleich sein muss, sich aber in der Richtung unterscheidet.

Es gilt also:

$$m \frac{v^2}{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}$$ (vgl. [Hei]) Gl. 25

Daraus folgt für das Verhältnis der betrachteten Energien im Kreisbeschleuniger:

$$\frac{W_{kin}}{W_{pot}} = \frac{mv^2}{2} \frac{r}{\gamma Mm} = -\gamma \frac{Mm}{2r} \frac{r}{\gamma Mm} = -\frac{1}{2}$$ Gl. 26

Es folgt somit aus Gl. 1:

$$W_{ges} = \frac{1}{2} W_{pot} = -W_{kin}$$ Gl. 27

Diese Gleichung sagt aus, dass im Kreisbeschleuniger die Gesamtenergie und die potentielle Energie von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängen. Sie sind beide als negativ anzunehmen.

Literatur

[Bro] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 10. Aufl. 1969

[Hei] Heidorn, D.: Gravitation
google Hamburg cited 14.03.2014
http://www.dieter-heidorn.de
(Physik Studienstufe\Gravitation\5. Potentielle Energie und Gravitationspotential)

[Kau] Kaufmann, W.: Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Bequerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen
DigiZeit Göttingen (08.11.1901) cited 02.09.2018
https://www.digizeitschriften.de/downread/PPN252457811_1901/PPN252457811_1901___log22.pdf

[Mes] Meschede, D.: Gerthsen Physik
Springer Verlag Heidelberg 24. Aufl. (2010) cited 26.02.2012
http://www.springerlink.com/content/978-3-642-12894-3#section=782231&page=1&locus=6