

Die Exponentialverteilung

als Zerfallsgesetz

R. Sydow, Niederfinow (Deutschland)
(2023)

abstrakt: die folgenden Ausführungen ergeben nichts Neues. Es handelt sich um eine Systematisierung und Wiederholung des Schulstoffs.

Hilfreich zum Verstehen wissenschaftlicher Artikel, die sich auf Prozesse unter Verwendung der Exponentialfunktion beziehen, ist die Darstellung der Termini.



Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
Allgemein	3
Die Gleichung der Exponentialverteilung	3
Schnittpunkt mit der Ordinaten	4
Fläche unter der Kurve	4
Mittel- oder Erwartungswert der Verteilung	4
mittlere Lebenszeit oder -dauer	5
Flächengleichheit	6
Halbwertszeit	6
Zerfallsprodukte	6
Literatur	8

Allgemein

In der Physik wird die Exponentialverteilung in verschiedenen Bereichen genutzt. Mit der Modellierung eines Prozesses als Exponentialverteilung ist es möglich, solche Prozesse mathematisch zu beschreiben. Insbesondere statistische Prozesse brauchen derartige mathematische Beschreibungen, um sie rechentechnisch fassen zu können.

Gerade Zerfallsprozessen wird der Verlauf einer Exponentialverteilung zugeordnet. Solche Begriffe, wie Halbwertszeit, Lebenszeit, Erwartungswert usw. werden zur Beschreibung des Prozesses immer wieder verwendet.

Da in der Literatur bei der Beschreibung dieser Prozesse verschiedene Parameter der Verteilung verwendet werden, sollen diese Parameter hier entwickelt und ihre Abhängigkeiten aufgezeigt werden.

Die Gleichung der Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung gehorcht der mathematischen Funktion ‚Exponentialfunktion‘.

$$f(t) = a e^{-bt}$$

Gl. 1

Ihr Graph ist im Bild 1 dargestellt:

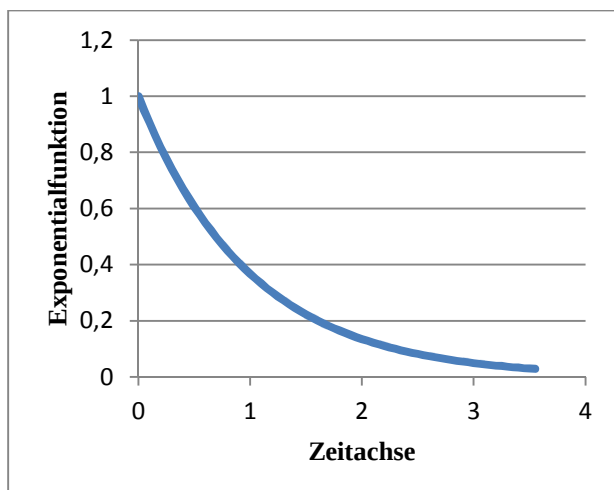


Bild 1: die Exponentialfunktion für $t \geq 0$

Als Verteilung ist sie nur für $t > 0$ definiert (vgl. [Göh] S. 100). Werte für den negativen Teil des Definitionsbereiches sind bei der Verteilung nicht von Interesse.

Das Zerfallsgesetz (sowohl im Nuklearbereich als auch beim Teilchenzerfall) führt auf diese Funktion:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad ([Jsh])$$

Gl. 1a

Die Herleitung der Funktion aus einem Zerfallsprozess ist in [Jsh] nachzulesen. Dabei werden beispielsweise N_0 Myonen in einem Zerfallsversuch betrachtet. Der Zerfallsprozess habe den charakteristischen Verlauf einer Exponentialkurve mit dem Koeffizienten im Exponenten $-\lambda$. Dieser Zerfallskoeffizient ist in $1/s$ anzugeben.

Quellenangabe:

Sydow, R. Die Exponentialverteilung, als Zerfallsgesetz Niederfinow (Deutschland) 2023
<https://rolfswelt.de/mathematik/#funktionen-exponentialfunktion>

Revision:

1.4.2.3 vom 15.07.2023

copyright ©:

alle Rechte vorbehalten, 2023, Rolf Sydow



Damit stellt die Kurve im Bild 1 die Anzahl der noch nicht zerfallenen Teilchen zum Zeitpunkt t dar.

In Abstraktion vom physikalischen Prozess wird die Gleichung Gl 1a in eine allgemeine Form umgeschrieben:

$$f(t) = A e^{-kt} \quad ([Jsh]) \quad \text{Gl. 1b}$$

Mit dieser Form der Funktion wird im Folgenden weitergearbeitet.

Schnittpunkt mit der Ordinaten

Der Schnittpunkt mit der y -Achse wird gefunden, wenn man den Wert an der Stelle $t = 0$ sucht.

Dazu wird im Folgenden die Gleichung Gl. 1b weiter untersucht.

$$f(t = 0) = A \quad \text{Gl. 2}$$

A ist also die Ausgangsanzahl einer betrachteten zu zerfallenden Menge zum Zeitpunkt $t = 0$. Sie stellt einen Normierungsfaktor dar, mit dem sich die Verteilung auf 1 beziehen ließe (siehe Bild 1).

Fläche unter der Kurve

Die Fläche unter einer Kurve wird durch Integration der Kurve gefunden:

$$F(t) = A \int_{t_1}^{t_2} e^{-kt} dt \quad \text{Gl. 3}$$

$$F(t) = -\frac{A}{k} e^{-kt} \Big|_{t_1}^{t_2} \quad \text{Gl. 4}$$

$$F(t) = \frac{A}{k} (1 - e^{-kt}) \quad \text{für } t_1 = 0 \text{ und } t_2 = t \quad \text{Gl. 4a}$$

Die Gesamtfläche unter Kurve in den Grenzen von 0 bis unendlich ergibt sich dann zu:

$$F(t) = -\frac{A}{k} e^{-kt} \Big|_0^\infty = \frac{A}{k} \quad \text{Gl. 5}$$

Sie ist die Gesamtlebenszeit aller Teilchen. Man stelle sich vor, dass die Kurve $f(t)$ eine Darstellung der zu einem Zeitpunkt t existierenden (also noch nicht zerfallenen) Teilchen darstellt. Dann führt die Summe aller existierenden Teilchen über die Gesamtzeit von 0 bis unendlich zur Gesamtlebenszeit aller Teilchen. Somit ist die Fläche unter der Kurve gerade die Summe aller Lebenszeiten für alle Teilchen.

Mittel- oder Erwartungswert der Verteilung

Hier sei zuerst definiert, was der Mittelwert einer Verteilung sein soll.

- „die mittlere Lebensdauer eines Systems ist der Mittelwert der Zeitspanne von Beanspruchungsbeginn bis zum Ausfall
- man bezeichnet die mittlere Lebensdauer als Mittelwert bzw. Erwartungswert von T “ ([Koc])
- dieser Erwartungswert ist wie folgt definiert:

$$„E(T) = \int_0^\infty x f(x) dx “ \quad ([Koc]) \quad \text{Gl. 6}$$

Quellenangabe: Sydow, R. Die Exponentialverteilung, als Zerfallsgesetz Niederfinow (Deutschland) 2023
<https://rolfswelt.de/mathematik/#funktionen-exponentialfunktion>

Revision: 1.4.2.3 vom 15.07.2023

copyright ©: alle Rechte vorbehalten, 2023, Rolf Sydow



Für die betrachtete Funktion $f(t)$ (also nicht in x sondern in t) nach Gl. 1b folgt dann:

$$E(t) = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad \text{bzw.} \quad \text{Gl. 7}$$

$$E(t) = A \int_0^{\infty} t e^{-kt} dt \quad t = -\frac{u}{k} \Rightarrow dt = -\frac{1}{k} du$$

Bei Substitution von $-kt$ durch u folgt

$$E(t) = A \int_0^{\infty} \frac{u}{-k} e^u \frac{du}{-k} = \frac{A}{k^2} \int_0^{\infty} u e^u du$$

Wegen $\int u e^u du = (u - 1)e^u + C$ (siehe [Unk]) folgt

$$E(t) = \frac{A}{k^2} (u - 1)e^u \Big|_0^{\infty}$$

Die Rücksubstitution von u zu t ergibt dann:

$$E(t) = -\frac{A}{k^2} (kt + 1)e^{-kt} \Big|_0^{\infty}$$

Es folgt nach Einsetzen der Grenzen:

$$E(t) = -\frac{A}{k^2} [(\infty * 0) - 1]$$

Weist man nun noch nach, dass die e -Funktion wesentlich schneller gegen 0 strebt, als es die lineare Funktion gegen unendlich schafft, kann man unendlich mal null in der letzten Gleichung mit null annehmen. Daraus folgt der Erwartungswert zu:

$$E(t) = \frac{A}{k^2} \quad \text{Gl. 8}$$

Nimmt man die o. g. Definition, dass die mittlere Lebensdauer dem Erwartungswert der Zerfallskurve entspricht, so führt dieses Ergebnis (Gl. 8) zu falschen Schlussfolgerungen. Während der Zerfallskoeffizient k in pro Sekunde anzugeben ist, muss die Anfangsteilchenzahl A in Stück angegeben werden. Damit ergibt sich für den Erwartungswert eine Einheit in Stück mal Quadratsekunden. Diese Maßeinheit ist nicht mit einer Zeit-Größe kompatibel.

mittlere Lebenszeit oder -dauer

Wenn im vorangegangenen Unterpunkt der Erwartungswert zu falschen Ergebnissen führt, ist der Ansatz für die Ermittlung der mittleren Lebenszeit also ein anderer. In ([Kar] S. 10) wird der folgende und für richtig einzuschätzende Ansatz angegebene mit:

$$\tau = \frac{\text{Lebenszeit aller Teilchen}}{\text{Anzahl der Teilchen}} \quad ([\text{Kar}] \text{ S. 10}) \quad \text{Gl. 9}$$

Wie oben beschrieben ist die Gesamtlebenszeit aller Teilchen mit der Gleichung Gl. 5 gegeben. Die Anzahl aller betrachteten Teilchen ist A .

Insofern gestaltet sich die Berechnung der mittleren Lebenszeit einfach:

$$\tau = (A/k) / A = 1/k \quad \text{Gl. 10}$$

Damit zeigt sich, dass die Annahme, die mittlere Lebensdauer der Myonen sei der reziproke Wert des Zerfallskoeffizienten, stimmt.

Betrachtet man die Anzahl der Teilchen, die noch bis zur mittleren Lebensdauer übrig sind, muss der Wert der mittleren Lebensdauer mit $t = \tau$ in die Gleichung Gl. 1 eingesetzt werden. Da nun der Wert für die Mittlere Lebensdauer mit Gleichung Gl. 10 bekannt ist folgt aus Gleichung Gl. 1b:

$$f(t) = A e^{-kt} = A e^{-1} \quad \text{Gl. 1c}$$

Drückt man den Funktionswert $f(t)$ als die Anzahl N der überlebenden Teilchen in Prozent der Anfangsteilchen A aus, ergibt sich:



$$\frac{N(t=1/k)}{A} 100 \% = 100e^{-1} = 36,79\%$$

Gl. 1d

Flächengleichheit

Gesucht ist die Stelle der Verteilung, wo die Fläche unter der Kurve bis zu dieser Stelle gleich der Fläche unter der Kurve ab dieser Stelle ist:

Die Fläche unter der Kurve ist gegeben durch Gleichung Gl. 4

$$F(t) = -\frac{A}{k} e^{-kt} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Gl. 4

Die gesuchte Aufgabe erfordert den Ansatz:

$$F(0 < t < t_m) = F(t_m < t < \infty)$$

Gl. 11

Es folgt:

$$-\frac{A}{k} e^{-kt} \Big|_0^{t_m} = -\frac{A}{k} e^{-kt} \Big|_{t_m}^{\infty}$$

Gl. 12

$$e^{-kt} \Big|_0^{t_m} = e^{-kt} \Big|_{t_m}^{\infty}$$

Gl. 13

$$e^{-kt_m} - 1 = 0 - e^{-kt_m}$$

Gl. 14

Durch Umstellen folgt dann:

$$2e^{-kt_m} = 1$$

$$-kt_m = \ln \frac{1}{2} \quad \text{bzw.}$$

$$t_m = \frac{\ln 2}{k}$$

Gl. 15

Halbwertszeit

Die Halbwertszeit ist dadurch gekennzeichnet, dass der Wert der Funktion um oder auf die Hälfte sinkt:

$$f(t = 0) = A$$

Gl. 16

$$f(t = t_{\text{HWZ}}) = Ae^{-kt_{\text{HWZ}}}$$

Gl. 17

Es gilt der Ansatz:

$$f(t = t_{\text{HWZ}}) = 0,5f(t = 0)$$

Gl. 18

$$Ae^{-kt_{\text{HWZ}}} = 0,5A$$

$$e^{-kt_{\text{HWZ}}} = 0,5$$

$$-kt_{\text{HWZ}} = \ln \frac{1}{2}$$

$$t_{\text{HWZ}} = \frac{\ln 2}{k}$$

Gl. 19

Hiermit wäre wegen der Gleichheit von Gl. 19 und Gl. 15 bewiesen, dass mit der Halbwertszeit auch die Flächenhälfte erreicht ist.

Zerfallsprodukte

Einen Gesichtspunkt gibt es noch zu betrachten, wenn man die Exponentialfunktion als Modell der Lebenszeit beim Zerfallsprozess von Teilchen heranzieht.

Quellenangabe: Sydow, R. Die Exponentialverteilung, als Zerfallsgesetz Niederfinow (Deutschland) 2023
<https://rolfswelt.de/mathematik/#funktionen-exponentialfunktion>

Revision: 1.4.2.3 vom 15.07.2023

copyright ©: alle Rechte vorbehalten, 2023, Rolf Sydow



Hat man eine vorgegebene Anzahl A von betrachteten Teilchen, die zu Beginn des Zerfallsprozesses vorhanden sein sollen, stellt sich die Frage nach den zerfallenen Teilchen.

Nach Gleichung Gl. 1 ist die Funktion der zum Zeitpunkt t noch existierenden Teilchen nach der Exponentialverteilung zu bestimmen:

$$f(t) = A e^{-kt} \quad \text{Gl. 1b}$$

Es ist festzustellen, dass die zu einem Zeitpunkt bereits zerfallenen Teilchen sich aus der Differenz der Gesamtzahl A minus der noch existierenden Teilchen ist.

$$f_z(t) = A (1 - e^{-kt}) \quad \text{Gl. 20}$$

Interessant ist festzustellen, dass zwingend die momentan zerfallenden Teilchen von der Anzahl der existierenden abzuziehen ist und der Anzahl der zerfallenen zuzuschlagen ist:

$$-f'(t) = f'_z(t) \quad \text{Gl. 21}$$

Das ist durch Ableitung der Gleichungen Gl. 1b und Gl. 20 nachzuvollziehen:

$$f'(t) = -kA e^{-kt} \quad \text{Gl. 22}$$

$$f'_z(t) = kA e^{-kt} \quad \text{Gl. 23}$$

Der daraus zu ziehende Schluss ist, dass es bei der Kontrolle von Zerfallsprozessen unerheblich ist, ob man die noch existierenden (respektive die zerfallenen) Teilchen zählt oder ob man die in einem Zeitraum zerfallenden Teilchen und damit die Änderung der Teilchen zählt. Dadurch, dass sich die mittlere Lebenszeit ausschließlich von dem Exponenten k (siehe Gl. 10) ableitet und dieser Exponent in allen Betrachtungen derselbe ist, führen alle Versuche bezüglich der Lebenszeit der Teilchen zum selben Ergebnis.



Literatur

- [Göh] Göhler, W.: Höhere Mathematik, Formeln und Hinweise
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig 4. Aufl. 1974
- [Jsh] Jshimbi (Ps.) et al.: Zerfallsgesetz
wikipedia unbekannt cited 29.01.2014
<http://de.wikipedia.org/wiki/Zerfallsgesetz>
- [Kar] Karg, T. et al: Teilchenphysik, kosmische Strahlung
Joachim Herz Stiftung Hamburg 1. Aufl. (2016) cited 20.08.2016
http://www.teilchenwelt.de/fileadmin/user_upload/Redaktion/Netzwerk_Teilchenwelt/Material_Lehrkraefte/Unterricht_TP_Kosmische-Strahlung_red.pdf
- [Koc] Koch, S.: Statistik für Lebensdauerverteilungen
Technische Universität Freiberg Freiberg (Sachsen) (14.06.2001) cited 04.09.2016
unbekannt
- [Unk] Unkelbach, T.: Partielle Integration mit Exponentialfunktionen, Klapptest
google unbekannt (2010) cited 04.09.2016
http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/a/ir/pi_ef_kt.pdf