Das Gravitationspotential

Maryland lässt grüßen

R. Sydow, Niederfinow (Deutschland)
(2022)

abstrakt: ist das Gravitationspotential eine physikalische Größe? Lässt es sich messen? Es wird gezeigt, dass das Gravitationspotential eine relative Größe ist. Deshalb wird sie für geeignet gehalten, die Zeitdilatation zwischen zwei Punkten im Gravitationsfeld zu bestimmen.

Einerseits wird gezeigt, wie die Formel der tatsächlichen Zeitdilatation im Gravitationsfeld beschaffen sein muss und andererseits wird gezeigt, wie diese Zeitdilatation ausfällt, wenn sich Gravitationsfelder unterschiedlicher Himmelskörper überlagern.

Die so gewonnenen Erkenntnisse werden auf das Maryland-Experiment angewendet. Die sich daraus ergebenden Schlussfolgerungen zeigen, dass die Messdaten der Experimentatoren sehr genau die Zeitdilatation aus den sich überlagernden Gravitationsfeldern von Sonne und Erde ergeben.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen

ART	allgemeine Relativitätstheorie
RT	Relativitätstheorie
SRT	spezielle Relativitätstheorie

Einleitung

Was ist ein Gravitationspotential? Diese Frage kann wohl ohne zu überlegen mit einer Formel beantwortet werden:

$$\varphi = -\frac{Gm_Q}{r} \qquad \text{([Mes] S.48)} \qquad \text{Gl. 1}$$

Aus der hier einfach aus einem Fachbuch entnommenen Formel geht hervor, dass zur Berechnung des Potentials φ[1] die Gravitationskonstante G und die das Gravitationsfeld erzeugende Masse m_Q erforderlich sind. Weiter wird der Ort benötigt, der wegen der Rotationssymmetrie eines Gravitationsfeldes hier durch r eindeutig bestimmt ist. Somit liegt die Formulierung, dass das Gravitationspotential eine ‚reine Feldeigenschaft' ([Mes] S. 48) ist, auf der Hand. Das Gravitationspotential wird als Skalar aufgefasst.
Eine solche Herangehensweise an die Darstellung des Gravitationspotentials führt letztlich dazu, dass man meint, jedem Punkt des Raumes oder des den Raum durchsetzenden Feldes ein solches Potential zuordnen zu können.

Wenn hier zwar nur vom Gravitationspotential die Rede ist, lassen sich diese Gedanken auch auf die Potentialdarstellung anderer Felder, wie beispielsweise elektrische, magnetische oder thermodynamische Felder (vgl. [Föl]) übertragen.
Damit hätte man schlussendlich den Fakt, dass das Gravitationspotential auch als physikalische Größe anzusehen wäre, die eine Eigenschaft des Gravitationsfeldes beschreibt. Es wäre der Schluss möglich, dass das Gravitationspotential ursächlich für die Zeitdilatation sein kann. Wenn also gesagt ist, dass es nicht die Beschleunigung (siehe [Scu]) ist, der wir eine Zeitdilatation verdanken, dann läuft das darauf hinaus, dass es das Potential sein muss, das zur Zeitdilatation im Gravitationsfeld führt.

Deshalb soll in dieser Anlage der Frage nachgegangen werden, worin die Ursache für die im Gravitationsfeld nachgewiesene Zeitdilatation zu suchen ist und wie sich diese Ursache auswirkt, wenn es sich dabei nicht um eine rotationssymmetrische Verteilung dieser Ursache handelt.

Was ist das Gravitationspotential?

Die Definition des Gravitationspotentials fällt je nach gewünschter Aussage unterschiedlich aus. So weisen einige Definitionen auf den Zweck der Größe ‚Potential' hin, der darauf zielt, dass ein Feld mittels dieser Größe beschrieben werden soll: „[…] das der *Gravitationskraft* zugrunde liegende Potential. Dessen Gradient kann formal als Gravitations-Feldstärke angesehen werden, die Gravitationskraft auf den Probekörper ergibt sich dann aus dem Produkt seiner Masse mit der Feldstärke" ([U1]).

[1] wird auch in der Literatur mit Φ bezeichnet

Es folgt aus der o. g. Gleichung (Gl. 1), dass aus der Ableitung nach dem Ort (hier dem Radius) die Feldstärke des betrachteten Feldes an diesem Ort resultiert:

$$\frac{d\varphi}{dr} = G\frac{m_Q}{r^2} = g(r) \qquad \text{Gl. 2}$$

Führt man den Prozess zurück, um durch Integration der Feldstärke (oder Gravitationsbeschleunigung) g auf das Potential zu kommen, wird in der Praxis oft von einer konstanten Beschleunigung g ausgegangen. Dann ergibt sich einfach:

$$\varphi = \int g dr = gr \qquad \text{Gl. 3}$$

In dieser Gleichung steckt also die Vereinfachung einer über den Radius konstanten Beschleunigung und einer mit null bewerteten Integrationskonstanten. Diese Vereinfachungen sind im Bereich der nahen Erdoberfläche und der Schulphysik akzeptabel, sollten aber bei tiefergründigen, physikalischen Betrachtungen entsprechend vorsichtige Anwendung finden.

Eine andere Art der Definition geht von der potentiellen Energie aus und definiert das Gravitationspotential als spezifische potentielle Energie:
„Wird die potentielle Energie durch die Masse *m* des Probekörpers dividiert, so erhält man wieder eine Größe, die nur das Gravitationsfeld beschreibt, das sogenannte Gravitationspotential“ ([Hei1] S. 17).
„Die auf die Masse m = 1 bezogene potentielle Energie nennt man das G.s [Gravitations]-potential U der Masse M […]“ ([Uhl] S. 762), ist eine analoge Definition, die eben die Masse m als Einheitsgröße in die Definition mit einbezieht und damit zwar nichts anderes aussagt aber dem Leser mehr Verständnis abverlangt. Einfach ausgedrückt ist die Definition des Potentials wie folgt: „Wir können das Gravitationspotential auch als das spezifische Arbeitsvermögen einer Masse bezeichnen […]“ ([Scr] S. 25). Mit der Spezifik ist der Bezug auf die Masse m eines bewegten Körpers gemeint, sodass diese Masse selbst ignoriert werden kann.
Damit ergibt sich das Gravitationspotential zu:

$$\varphi = \frac{\Delta W_{pot}}{m} \qquad \text{Gl. 4}$$

und bei Betrachtung der Gleichung (siehe [Syd1] S. 5 Gl. 15) folgt korrekter Weise:

$$\varphi = a_0 R^2 \frac{h}{r_u(r_u+h)} \, . \qquad \text{Gl. 5}$$

Hierin ist der Term a_0R^2 eine Konstante, die mit Gm_Q (vgl. Gl. 2) gleichgesetzt werden kann. Die Höhe h ist immer eine Höhendifferenz, die aussagt, dass ein Potential nicht an einer Stelle des Feldes absolut existiert, sondern dass ein Potential die spezifische Arbeit ist, die ausgehend von einem unteren Radius r_u über die Höhendifferenz zu bewerten ist. Daraus leitet sich ab, dass „Energie und Gravitationspotential […] nicht direkt messbare Größen [sind]. Messbar sind nur ihre Änderungen“ ([Scr] S. 25).
Das Potential im Unendlichen, das mit null anzunehmen ist, stellt in allen Rechnungen eine Hilfsgröße dar, die oft einfach weggelassen wird. Das darf aber in der Betrachtung des

Potentials nicht dazu führen, dass der Charakter dieser Größe als Energieäquivalent verändert wird.

Was stimmt mit dem Gravitationspotential nicht?

Natürlich ist alles in Ordnung mit dem Gravitationspotential. Es ist nur die Frage, in welchem Zusammenhang das Gravitationspotential mit der sich aus der ART ergebenden Zeitdilatation steht.
Um dieser Frage näher zu kommen, sei hier festgestellt, dass jedem Punkt des Gravitationsfeldes ein von der Ursache der Zeitdilatation abhängiger Lauf einer Ortsuhr zukommt. Schärfer formuliert wäre zu sagen, dass an einem Ort jede Uhr, so sie denn richtig gehe, denselben Lauf haben muss. Dieser Gang der Uhr ist somit vom Standort und auch vom Bewegungszustand des Beobachters unabhängig. Der absolute Raum ist durch diesen Gang der Uhren gegeben.

Ist der Ort des Beobachters ein anderer als der der Uhr und zwischen Beobachter und Uhr existiere ein Potentialgefälle, wird der Beobachter einen unterschiedlichen Gang seiner Uhr zur Uhr an dem anderen Ort feststellen. Dieser Unterschied ergibt sich nach den bisherigen Erkenntnissen aus der Beziehung:

$$\mathrm{dt} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}}} \qquad \text{(vgl. [Fli] S. 61)} \qquad \text{Gl. 6}$$

(Es sei bemerkt, dass das Φ mit dem φ obiger Gleichungen identisch ist. Mit dt ist die Zeitspanne des Beobachters gemeint, wenn $\mathrm{d}\tau$ die äquivalente Zeitspanne einer Uhr in einem anderen Potential ist.)
Aus der Gleichung (Gl. 6) ist durch die Reihenentwicklung nach Taylor (siehe [Syd2]) eine vereinfachte, polynomische Formel zu entwickeln, in welcher die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$\mathrm{dt} \approx \mathrm{d}\tau\left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \qquad \text{Gl. 7}$$

Zu beachten ist, dass das Φ als Potential, wie im vorherigen Unterpunkt beschrieben, immer über eine Höhendifferenz h im Sinne der Gleichung Gl. 5 verstanden werden muss.
Der Unterschied in den beiden Gleichungen (Gl. 6 und Gl. 7) ist für kleine Φ verschwindend gering. Als Beispiel soll hier der Vergleich der Berechnung für die Uhr im Maximum des Gravity-Probe-A-Experimentes angestellt werden. Dieses lag h = 10.000 km über der Erdoberfläche. Es ergibt sich damit der Wert für die Potentialdifferenz von:

$$\Delta\Phi = 3{,}82 \cdot 10^7 \, \frac{m^2}{s^2}$$

und somit 0,99999999957555555582578518499402 für das Verhältnis $\mathrm{dt}/\mathrm{d}\tau$ gemäß Gl. 6 aber 0,99999999957555555555555555555556 für $\mathrm{dt}/\mathrm{d}\tau$ gemäß Gl. 7. Damit ist die Differenz der Verhältnisse $\mathrm{dt}/\mathrm{d}\tau$ nach den beschriebenen Formeln für diesen konstruierten Fall mit $2{,}7 \cdot 10^{-19}$ zu bewerten. Diese Differenz kann als irrelevant deklariert werden.

Wenn es bei Messungen im Schwerefeld der Erde somit egal ist, nach welcher Formel man zur zugehörigen Zeitdilatation kommt, so sollte doch beachtet werden, dass die Anwendung der gerundeten Formel Gl. 7 bei wesentlich größeren Potentialunterschieden zu nicht vernachlässigbaren Fehlern führen wird.
Es ergibt sich aus der Anwendung der Formeln für die gravitative Zeitdilatation eine weitere Konsequenz. Diese widerspiegelt sich in dem Paradoxon, das sich für eine Zeitdilatationsmessung mit 3 Uhren wie folgt erklärt:

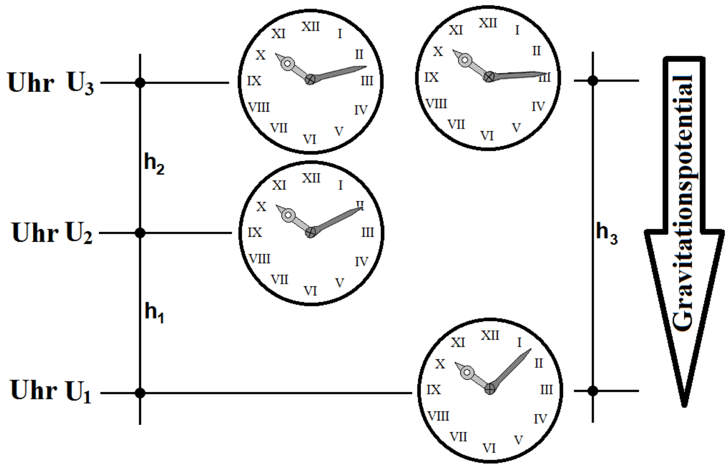

Bild 1: Uhren in unterschiedlichem Gravitationspotential

Es werden Uhren U_i (wie im Bild 1 gezeigt) in unterschiedlichen Höhen eines Gravitationsfeldes positioniert. Wie auch im Maryland-Experiment durchgeführt, werden diese Uhren vorher synchronisiert. Nach einer Zeitspanne dt_i des Aufenthalts der Uhren in unterschiedlichen Potentialen des Gravitationsfeldes werden sie wieder zusammengeführt, um die auf den Uhren angezeigten Zeitspannen zu vergleichen. Dabei sei der Prozess des Positionierens vor dem Versuch und des Zusammenführens nach dem Versuch als kurzfristig im Vergleich zur Aufenthaltszeit der Uhren im Gravitationsfeld zu betrachten, sodass sich daraus ergebende Ungenauigkeiten in der Messung als vernachlässigbar bewertet werden können.

Für den Beobachter auf der Erde läuft die Uhr U_1 aufgrund der im Versuch auftretenden höchsten Gravitation am langsamsten. Bei Durchführung von Tests und deren Auswertung nach Gleichung Gl. 7 würde die Uhr U_2 in der Höhe h_2 schneller gehen. Da der Gang der Uhr durch eine von der Masse der Erde ausgehenden Ursache abhängig ist, ist er als absolut und objektiv anzunehmen. Es gelte nach den bekannten Formeln (hier die vereinfachte Form nach Gl. 7) und deren Anpassung an die Versuchsbedingungen:

$$\mathrm{dt}_1 = \mathrm{dt}_2\left(1 - \frac{\Delta\Phi(\mathrm{h}_1)}{\mathrm{c}^2}\right) \qquad \text{Gl. 8}$$

Betrachtet der Beobachter die Uhr U_3 in der Höhe h_3, so wird er nach gleichem Prinzip feststellen, dass diese Uhr noch schneller geht, als es die Uhr U_2 tut. Die Relation verstrichener Zeiten wäre dann hier mit:

$$dt_1 = dt_3\left(1 - \frac{\Delta\Phi(h_3)}{c^2}\right) \qquad \text{Gl. 9}$$

zu berechnen.

Jetzt wird diese Situation auf einen Beobachter übertragen, der sich in der Höhe h_1 befindet und die Uhr U_2 als seine Ortsuhr betrachtet. Dieser soll die Gegebenheiten nach demselben Messprinzip untersuchen und müsste praktisch feststellen, dass die Uhren Uhr 1 und Uhr 3 in gleicher Weise gehen, also dieselben Zeiten anzeigen, wie es der Beobachter auf Erdniveau vorausgesagt hat. Dieser Gedanke folgt der Logik, dass zur Auswertung des Versuchs alle 3 Uhren an einen Ort kommen und miteinander verglichen werden. Damit sind die Ergebnisse dieser Auswertung für alle Beobachter dieselben. Der absolute Charakter dieser Zeitmessung tut das Seinige.

Will der Beobachter mit der Uhr U_2 aber planen und seine zu erwartenden Messergebnisse theoretisch voraussagen, dann müsste er die vorhandenen Formeln anwenden:

$$dt_2 = dt_1\left(1 + \frac{\Delta\Phi(h_1)}{c^2}\right) \qquad \text{Gl. 10}$$

und

$$dt_2 = dt_3\left(1 - \frac{\Delta\Phi(h_2)}{c^2}\right). \qquad \text{Gl. 11}$$

Soweit scheint alles in Ordnung zu sein. Auch das Plus-Zeichen in Gleichung Gl. 10 hat seine Berechtigung, weil des Potentialgefälle hier gedreht ist (vgl. den Pfeil ‚Gravitationspotential' im Bild 1). Die Frage, die sich stellt, ist die nach der Gleichheit der Ergebnisse. Wenn beispielsweise das dt_1 aus Gleichung Gl. 8 sich aus einem dt_2 berechnet, dann muss sich logischer Weise beim Verstreichen dieses dt_1 in Gleichung Gl. 10 dasselbe dt_2 ergeben, von dem in Gleichung Gl. 8 ausgegangen wurde. Es muss also gelten:

$$dt_1 = dt_1\left(1 + \frac{\Delta\Phi(h_1)}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\Delta\Phi(h_1)}{c^2}\right) \qquad \text{Gl. 12a}$$

$$1 = \left(1 + \frac{\Delta\Phi(h_1)}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\Delta\Phi(h_1)}{c^2}\right) = 1 - \left(\frac{\Delta\Phi(h_1)}{c^2}\right)^2 \qquad \text{Gl. 12b}$$

$$0 \approx \frac{\Delta\Phi(h_1)}{c^2} \qquad \text{Gl. 12c}$$

Von der Richtigkeit einer solchen Bedingung (Gl. 12c), die darauf hinausläuft, dass der Potentialunterschied über die Höhendifferenz $h_1 \neq 0$ gerade Null sein soll, ist nicht auszugehen. Selbst wenn dieser Effekt für die Anwendung der Gleichungen in irdischen Gefilden verschwindend klein ist, stellt er doch ein prinzipielles Problem dar.

Genauso stellte sich die Betrachtung für den die Uhr U_2 haltenden Beobachter dar, wenn er seine mit der Uhr U_3 vergleichen wollte. Er würde erkennen wollen, dass die verstrichene Zeitspanne dt_3 der Uhr U_3 in Relation zur Uhr U_1 nach Gleichung Gl. 9 genau so groß ist, wie diese Zeitspanne dt_3 aus Gleichung Gl. 11, wenn die anzunehmende Zeitspanne dt_2 sich aus der Gleichung Gl. 8 ergäbe:

$$\mathrm{dt}_2\left(1-\frac{\Delta\Phi(h_1)}{c^2}\right)=\frac{\mathrm{dt}_2}{\left(1-\frac{\Delta\Phi(h_2)}{c^2}\right)}\left(1-\frac{\Delta\Phi(h_3)}{c^2}\right) \qquad \text{Gl. 13a}$$

$$\left(1-\frac{\Delta\Phi(h_1)}{c^2}\right)\left(1-\frac{\Delta\Phi(h_2)}{c^2}\right)=\left(1-\frac{\Delta\Phi(h_3)}{c^2}\right) \qquad \text{Gl. 13b}$$

$$1-\frac{\Delta\Phi(h_1)+\Delta\Phi(h_2)}{c^2}+\frac{\Delta\Phi(h_1)\Delta\Phi(h_2)}{c^4}=1-\frac{\Delta\Phi(h_3)}{c^2} \qquad \text{Gl. 13c}$$

Geht man nun davon aus, dass $h_1 + h_2 = h_3$ ist und damit auch $\Delta\Phi(h_1)+\Delta\Phi(h_2)=\Delta\Phi(h_3)$ ist, folgt analog zu vorher die Bedingung:

$$\frac{\Delta\Phi(h_1)\Delta\Phi(h_2)}{c^4}\approx 0\,. \qquad \text{Gl. 13d}$$

Auch diese Bedingung ist für irdische Betrachtungen als Näherung anwendbar, prinzipiell aber inakzeptabel. Wie oben auch (Gl. 12c) darf hier (Gl. 13d) ebenso nur eine Rundzeichen und kein Gleichheitszeichen gesetzt werden, um den Sachverhalt korrekt zu beschreiben.

Das gezeigte Paradoxon liegt in der nicht korrekten Anwendbarkeit der vorgegeben Formeln. Würde man annehmen, dass die Durchrechnung dieser Uhrenvergleiche mit den genaueren Formeln für die Zeitdilatation (siehe Gleichung Gl. 6) zu einem anderen Ergebnis führen, würde man nach komplizierterer Rechnung seinen Irrtum einsehen.
Schlussfolgerung aus dieser Diskrepanz muss sein, dass die Gleichungen zur Berechnung einer Zeitdilatation aus dem Gravitationspotentialgefälle ihre Gültigkeit nur in schwachen Gravitationsfeldern haben. Unterstellt man, dass es wegen der Lösbarkeit der Wurzel (siehe Gl. 6) das maximale Gravitationspotential gerade $\Phi = c^2$ ist, folgt für starke Gravitationsfelder (beispielsweise an der Oberfläche eines Schwarzen Lochs), dass der Quotient Gl. 13d bis zu eins werden kann. Damit wäre eine Umkehrbarkeit der Betrachtung vom Gravitationspotential zur Zeitdilatationen so nicht mehr haltbar.

Worin ist die Ursache für die gravitative Zeitdilatation zu suchen?

Wenn diese Frage so konkret gestellt ist, zielt sie eher darauf ab, herauszufinden, welche Ursachen als Grund für die gravitative Zeitdilatation nicht in Betracht kommen. Der Grund für diese Fragestellung ist, dass in der Literatur verschiedene Ursachen für die gravitative Zeitdilatation herangezogen werden.

Als Ursache der Zeitdilatation in der SRT ist eindeutig die Relativgeschwindigkeit aufzufassen. Einerseits ist sie die einzige Variable, von der diese Zeitdilatation abhängig ist und andererseits wird durch die Lorentz-Transformation aus der Relativgeschwindigkeit die Zeitdilatation direkt abgeleitet.
Zur Begründung der Geschwindigkeit als Ursache der Zeitdilatation in der SRT werden also in diesem Falle zwei Indizien herangezogen. Erstens ist es der Formalismus, der in seiner Formel die Ursache enthält und zweitens ist es der Ausgangspunkt einer Herleitung, die den Ursache-Wirkungs-Mechanismus dokumentieren soll.
In der ART gibt es nun sowohl verschiedene Formeln mit unterschiedlichen Variablen, als auch unterschiedliche Herleitungen, die damit auf unterschiedliche Ursachen schließen lassen.

Anzufangen wäre hier mit der von Einstein selbst entwickelten Formel für die gravitative Zeitdilatation:

$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)$ ([Ein3] Anhang 3c) Gl. 14

Diese Formel ist abgeleitet aus der Rotverschiebung von Spektrallinien, die sich für eine Uhr auf einer rotierenden Scheibe ergibt, wenn man von der Formel für die Zeitdilatation der SRT ausgeht.
Wenn in dieser Formel das Gravitationspotential enthalten ist und als vermeintliche Ursache für die Zeitdilatation herangezogen werden könnte, lässt aber die Herleitung der Formel jedweden Hinweis auf das Potential als Ursache der Zeitdilatation vermissen. Es wird lediglich davon ausgegangen, dass aus einer Geschwindigkeit der auf der rotierenden Scheibe befindlichen Uhr auf eine Zeitdilatation zu schließen ist. Weil dann durch die Rotation auch eine Beschleunigung wirkt und diese Beschleunigung nach dem Äquivalenzprinzip einer Gravitation gleichzusetzen ist, muss eine äquivalente Gravitation dieselbe Zeitdilatation ergeben. Wenn überhaupt von einer Ursache die Rede sein kann, dann wären hier die Fliehbeschleunigung und die Gravitation als solche anzusehen.

Einen besseren Ansatz machte Einstein, als er in einem Gedankenexperiment von der Energie einer Strahlung ausging, die sich gegen das Gravitationsfeld bewegen musste. Er kommt zum selben Ergebnis ([Ein2] S. 904), wie oben. Doch die Herleitung erfolgte eindeutig über einen Vergleich von Energien dieser Strahlung in unterschiedlichen Höhen des Gravitationsfeldes. Es fragt sich also, ob es die Energie ist, die einen ursächlichen Einfluss auf die Zeitdilatation ausübt.

Es kursieren aber auch Formeln analog der Gleichung Gl. 14, wo das Gravitationspotential mit dem Faktor 2 behaftet ist. Wie es dazu kommt und welche Hintergründe dazu führten, ist in [Hei2]) nachzulesen.

In der Diskussion über die Ursache der gravitativen Zeitdilatation stehen sowohl Energiedifferenzen, die Beschleunigung als Gravitation und das Gravitationspotential zur Verfügung.

Es gibt noch eine vollkommen andere Herangehensweise zu einer Dilatationsformel zu gelangen. Bei dieser ist davon auszugehen, dass als Voraussetzung für eine gravitative Zeitdilatation eine die Gravitation erzeugende Masse vorhanden sein muss. Dass diese Masse über eine Gravitation dann andere Massen anziehen kann, ist seit Newton bekannt. Der Mechanismus, wie aus der Masse eine Zeitdilatation entsteht, bleibt jedoch verborgen.
Hier hilft Einstein weiter. Er gibt dem von der Gravitation durchsetzten Raum eine nicht euklidische Metrik. Nicht euklidisch bedeutet, dass man dem Raum eine Krümmung bemessen muss. Es wird davon gesprochen, dass die Zeitdilatation mit der Krümmung des Raumes einhergeht. Wie aber der Wirkungsmechanismus: Masse-Gravitation-Raumkrümmung-Zeitdilatation funktioniert, ist nicht schlüssig beschrieben.
Ein Anhaltspunkt findet sich lediglich in der Art der Herleitung der Zeitdilatation durch Einstein selbst. Er leitet die Zeitdilatation aus einer Frequenzverschiebung des Lichts ab, wenn sich dieses Licht gegen ein Gravitationsfeld bewegt (vgl. Gl. 14). Dabei wird stillschweigend unterstellt, dass die Frequenz als ein Taktgeber für die Zeit gesehen werden

kann und damit die Änderung der Frequenz als Maß für die Änderung der Zeit heranzuziehen ist. Der sich dahinter verbergende Gedanke ist sicherlich der, dass für das Licht selbst die Frequenz eine Konstante sein muss. Das Licht selbst, so es sich denn selbst beobachten könnte, bewegte sich unbeeinflusst durch den Raum. Wenn eine Frequenzänderung dieses Lichts von einem Beobachter registriert wird, kann das nur durch die Eigenschaft des mit Gravitation durchsetzten Raums selbst hervorgerufen worden sein.

In gleicher Weise lässt sich auch das Bild der Krümmung des Raumes erklären. Es ist das Licht, dem nun nachgewiesener Maßen nachgesagt wird, dass es im Gravitationsfeld seine Richtung verändert. Da aber das Licht aufgrund seiner Masselosigkeit nicht beschleunigt werden kann und eine Richtungsänderung immer nur durch eine Beschleunigung hervorgerufen wird, interpretiert man einfach den Raum als gekrümmt. Damit bleibt das Licht für sich auf gerader Linie durch den gekrümmten Raum.

Interessant ist die Frage, welches Maß an Gravitation für eine definierte Krümmung erforderlich ist. Dieses Maß wäre damit auch ein Hinweis auf die anzunehmende Zeitdilatation. Um sich dieser Frage zu nähern, ist es unumgänglich, sich in Einsteins Gedankengänge zu versetzen:
Der Ausgangspunkt, von dem in aller Kürze ausgegangen werden kann, ist das Linienelement:
$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2$ ([Ein1] S. 777 Gl. (1)) Gl. 15
Das mit ds bezeichnete Linienelement erinnert an das Ergebnis der Transformation der Kugelwelle in ein bewegtes Koordinatensystem im Rahmen der SRT. Dort war es allerdings mit null angenommen, weil die Interpretation der Gleichung aus dem Blickwinkel erfolgte, dass mit dieser Gleichung die sich ausdehnende Lichtkugel gemeint war. Hier könnte man annehmen, dass das Linienelement zu null wird, wenn keine Beschleunigungen wirken.
Es wird mit der Formel ausgesagt, dass sich eine Strecke ds im gravitationsdurchsetzen Raum aus der Addition ihrer Komponenten nach dem Satz des Pythagoras ergibt. Die Komponenten dieser Strecke sind dabei immer die Differenzen von Koordinaten. Die Komponente dX_1 ist also die Differenz der Koordinaten X_{1Ende} minus $X_{1Anfang}$. Wählt man diese beiden Koordinaten so, dass sie sehr dicht beieinander liegen (also ihr Abstand differentiell klein ist), kann man die Änderung der Gravitation zwischen diesen beiden Stellen vernachlässigen. Es wird dann von der Linearität in diesem Gebiet ausgegangen und unterstellt, dass die Gesetze der SRT anwendbar sind. Zu beachten ist dabei, dass die vierte Komponente dX_4 der Zeitkomponente $c\Delta t$ entspricht, die hier keine Lichtfortpflanzung bezeichnet, sondern lediglich als formale Komponente des 4-dimensionalen Raumes verwendet wird.
Damit macht die Gleichung Gl. 15 aber keine Aussage über den Einfluss der Gravitation auf das Linienelement. Es ist also in diese Beziehung noch der Einfluss der Gravitation hinzuzufügen. Einstein betrachtet zu diesem Zwecke die Differentiale zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt seines Linienelementes.

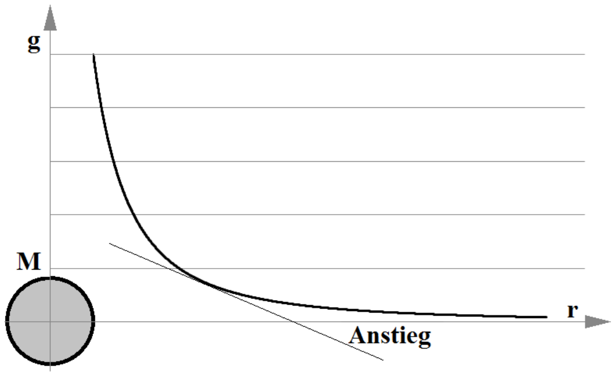

Bild 2: die durch die Masse M hervorgerufene Gravitation im Abstand r

Diese Differentiale, die nach dem allgemeinen Verständnis dem Anstieg einer Kurve entsprechen, wurden von Einstein in allgemeiner Form gefasst. Seine Einschränkung war, dass es sich dabei um „bestimmte lineare homogene Ausdrücke“ ([Ein1] S. 778) handeln musste. Er stellte diesen Ansatz in der Gleichung dar:

$dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma} dx_\sigma$ ([Ein1] S. 778 Gl. 2) Gl. 16

Damit drückte er aus, dass es für jede Komponente seines Linienelementes dX_ν (mit $\nu = 1, 2, 3, 4$) in jeder der 4 möglichen Raumdimensionen σ eine durch die Gravitation, die durch $\alpha_{\nu\sigma}$ repräsentiert wird, hervorgerufene Änderung dieser Komponente geben kann.

Führt man diese Erkenntnis für die 4 Komponenten ν zusammen, kommt dabei eine Gleichung heraus, die in ihrer allgemeinsten Form so aussieht:

$ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau}\, dx_\sigma dx_\tau$ ([Ein1] S. 778 Gl. 3) Gl. 17

Die Verwendung des Index τ statt ν ist nicht erklärt. Ebenfalls nicht erklärt ist das Auftauchen des Anstiegs dx_τ. Beschrieben ist lediglich, „…daß [sic] die Größen $g_{\sigma\tau}$ vom physikalischen Standpunkt aus als diejenigen Größen anzusehen sind, welche das Gravitationsfeld in Bezug auf das gewählte Bezugssystem beschreiben“ ([Ein1] S. 779).

Ermittlung der gravitativen Zeitdilatation

Soviel zur allgemeinen Darstellung Einsteins über die Wirkung des Gravitationsfeldes. Um an dieser Stelle nicht auszuufern, soll in den folgenden Überlegungen davon ausgegangen werden, dass das Gravitationsfeld das Feld einer kugelsymmetrischen Masse sei, so wie es von Himmelskörpern hinlänglich bekannt ist. Es sollten sich damit Vereinfachungen in der formelmäßigen Darstellung des beschriebenen Prozess ergeben.

Die Vereinfachung besteht darin, dass die auf einen Probekörper wirkende Gravitation grundsätzlich zum Mittelpunkt der Masse M zeigt. Wird diese Wirkungsrichtung mit der Abszisse eines Koordinatensystems gleichgesetzt, ergeben sich alle anderen Komponenten der Gravitation zu Null. Auch die Zeit reduziert sich auf eine Komponente. Es ergibt sich somit aus der Gleichung Gl. 17 diese Gleichung in ausgeschriebener Form:

$$ds^2 = \begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}^2 ,$$ Gl. 18a

die sich dann auch in einfacher Weise auflösen lässt:

$$ds^2 = x^2 f(r) - (ct)^2 f(r)$$ Gl. 18b

Weil das Linienelement eine Invariante ist, das also von jedem Ort aus dieselbe Größe darstellt, folgt:

$$ds(r_1) = ds(r_2)$$ Gl. 19a

$$x^2 f(r_1) - (ct)^2 f(r_1) = x^2 f(r_2) - (ct)^2 f(r_2)$$ Gl. 19b

Betrachtet man hierin die zeitliche Komponente gesondert, indem man alles von einem Radius aus betrachtet und sich damit die x-Komponente eliminiert, muss analog gelten:

$$t^2(r_1) f(r_1) = t^2(r_2) f(r_2)$$ Gl. 19c

bzw.

$$t(r_1) = t(r_2)\sqrt{\frac{f(r_2)}{f(r_1)}}$$ (vgl. auch [Ein1] S. 787 Gl. 18) Gl. 19d

Diese schlichte Formel sagt aus, dass die von zwei Uhren abgelesenen Zeitspannen durch die gegebene Beziehung Gl. 19d miteinander verknüpft sind.

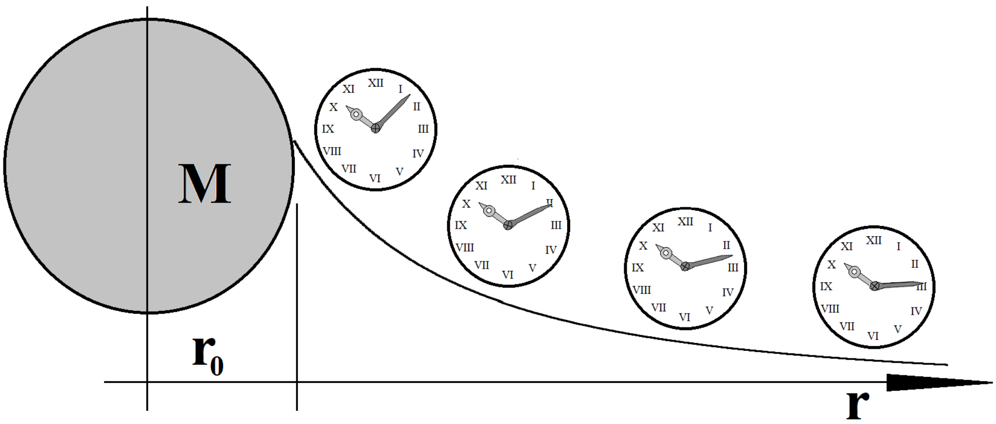

Bild 3: angenommene Zeitrelationen im Gravitationsfeld

Dabei sei beachtet, dass es noch keine Benennung der Funktion f(r) gibt. Das, was von dieser Funktion bekannt ist, das sind der Anfangs- und der Endwert sowie ein Hinweis auf die Monotonie. Sie sind aus dem obigen Bild (Bild 3) ableitbar.

Der Endwert der Funktion ist:

$$f(r = \infty) = 1$$ Gl. 20a

Er resultiert aus der Überlegung, dass im Unendlichen das Gravitationsfeld null ist und damit eine Funktion, die den Einfluss der Gravitation ausdrücken soll, keine Änderung einer Größe bewirken darf.

Der Anfangswert der Funktion f(r) ist abhängig von der Gravitation an der Oberfläche der Masse M. Dieser Wert ist nur dann bekannt, wenn es sich bei der Masse um ein schwarzes Loch handelt. Dann ist dieser Wert unendlich groß:

$$f(r = r_S) = \infty \qquad \text{Gl. 20b}$$

Letztlich geht allein aus diesen beiden Werten hervor, dass die Funktion eine reziproke sein muss. Mit größer werdendem Radius sinkt die Gravitation, die Uhren laufen aber immer schneller:

$$f(r) = \frac{1}{f^*(r)} \qquad \text{Gl. 20c}$$

Das, was nicht von vorn herein bestimmbar ist, ist der Verlauf dieser Funktion. Diese Erkenntnis ist aber nicht Grund, an dieser Stelle mit den Überlegungen aufzuhören. Es gibt eine Möglichkeit, die Funktion f(r) zu normieren. Eine solche Normierung würde bedeuten, dass unabhängig von der die Gravitation erzeugende Masse M eine Beziehung zwischen den Funktionsverläufen f(r) aller Massen hergestellt werden kann.

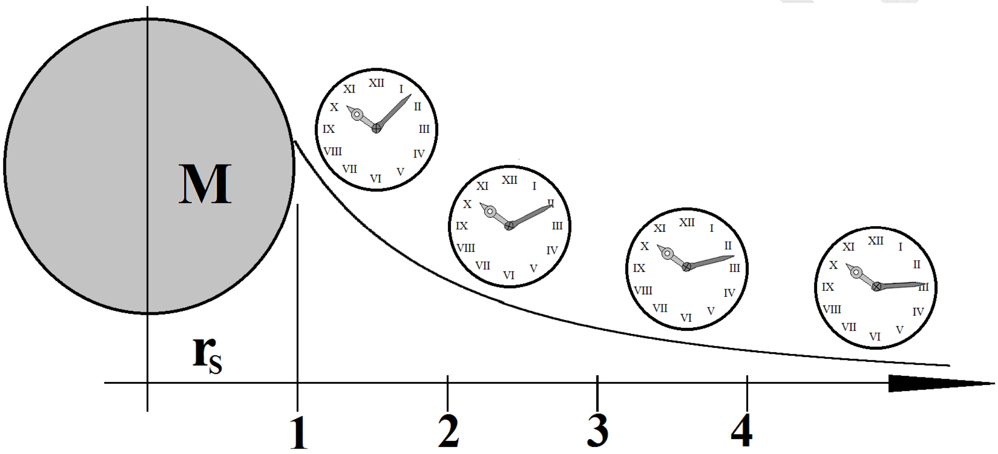

Bild 4: normierter Zeitdilatationsverlauf

In einem ersten Schritt wird die Funktion $f^*(r)$ auf den Schwarzschildradius der betrachteten Masse M abgestellt. Das heißt, dass von jeder betrachteten Stelle r der Schwarzschildradius r_S abzuziehen ist. Damit ist gegeben, dass die Funktion nun $f^*(r-r_S)$ immer mit demselben Wert nach Gleichung Gl. 20b beginnt.

Wählt man noch eine dimensionslose Abszisse dadurch, dass man die aktuelle Abszisse durch den Radius r normiert, ist der Verlauf der Zeitdilatation unabhängig von der Ausdehnung des Gravitationsfeldes. Die Funktion lautet dann $f^*((r-r_S)/r)$.

Mit dieser Maßgabe lässt sich die Funktion f(r) konkretisieren:

$$f^*(r) = k\frac{r-r_S}{r} \qquad \text{Gl. 21}$$

worin k ein beliebiger (wie Einstein forderte) linearer homogener Ausdruck sein muss.

Damit folgt für die Darstellung der zeitlichen Unterschiede aus der Gleichung Gl. 19d und unter Berücksichtigung der erforderlichen Monotonie nach Gleichung Gl. 20c:

$$t(r_1) = t(r_2)\sqrt{\frac{k\frac{r_1-r_S}{r_1}}{k\frac{r_2-r_S}{r_2}}}, \qquad \text{Gl. 22a}$$

was nach unwesentlicher Umformung zu:

$$t(r_1) = t(r_2)\frac{\sqrt{1-\frac{r_S}{r_1}}}{\sqrt{1-\frac{r_S}{r_2}}} \text{ (vgl. [U2])} \qquad \text{Gl. 22b}$$

wird.

Diese Formel (Gl. 22b) zeigt, wie zwei Uhren in einem Gravitationsfeld relativ zueinander unterschiedlich schnell gehen. Dabei lassen sich die Eckpunkte (vgl. Gl. 20) nun einfach überprüfen.

Ist die Uhr U_2 im Unendlichen, folgt für die im Gravitationsfeld befindliche Uhr U_1:

$$t(r_1) = t(r_2 = \infty)\sqrt{1-\frac{r_S}{r_1}} \quad (r_1 < \infty) \qquad \text{Gl. 23a}$$

Ist die Uhr U_1 sogar direkt auf dem Gravitationsradius, ergibt sich für sie die Zeit:

$$t(r_1 = r_S) = t(r_2)\frac{\sqrt{1-\frac{r_S}{r_S}}}{\sqrt{1-\frac{r_S}{r_2}}} = 0 \quad (r_2 > r_S) \qquad \text{Gl. 23b}$$

Sind zwei Uhren hingegen an der gleichen Stelle im Gravitationsfeld (resp. im selben Abstand vom Mittelpunkt der Masse M) folgt auch die Gleichheit der verstrichenen Zeitabschnitte:

$$t(r_1 = r_2) = t(r_2)\frac{\sqrt{1-\frac{r_S}{r_2}}}{\sqrt{1-\frac{r_S}{r_2}}} = t(r_2) \qquad \text{Gl. 23c}$$

Welche Schlussfolgerungen sind aus dieser Herleitung der Gleichung Gl. 22b abzuleiten?

- Wenn in der ART die Rede von einer durch die Gravitation bestimmten absoluten Zeit sein sollte, dann stimmt das nur im Hinblick darauf, dass an einer Stelle des Raumes eine Uhr mit einem bestimmten, von den Eigenschaften des Raumes abhängigen Zeitmaß läuft.
- Die Betrachtung des Zeitmaßes ist immer eine vergleichende. Es können nur die Uhren, die an unterschiedlichen Stellen des Raumes aufgestellt sind, in ihrem Gang verglichen werden.
- Aus der Herleitung selbst geht kein ursächlicher Zusammenhang zwischen der Gravitation selbst und dem unterschiedlichen Zeitlauf der Uhren hervor.

Eine weitere Schlussfolgerung ist, dass der Schwarzschildradius in der Beziehung der Zeiten noch ersetzt werden kann:

wegen:

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \quad \text{([Mül])} \qquad \text{Gl. 23}$$

und:

$$\Phi = gr = \frac{GM}{r} \quad \text{(vgl. Gl. 2)} \qquad \text{Gl. 24}$$

folgt:

$$t(r_1) = t(r_2)\frac{\sqrt{1-2\frac{\Phi_1}{c^2}}}{\sqrt{1-2\frac{\Phi_2}{c^2}}} \qquad \text{Gl. 25}$$

Diese Form der Terme erscheint bekannt (siehe Gl. 6). Es sei aber an dieser Stelle herausgestellt, dass es sich bei dem Potential Φ in Gleichung (Gl. 25) um das Potential an der betrachteten Stelle zur Verschiebung einer Masse ins Unendliche handelt. Das Potential im Sinne einer Potentialdifferenz, so wie sie in Gl. 6 und Gl. 7 verwendet wird, führt nur zu einer Näherung in schwachen Gravitationsfeldern.

Wie überlagern sich Gravitationspotentiale?

Diese Frage wird in der Literatur einfach beantwortet: „Das resultierende Gravitationspotential der beiden Massen in einem Punkt P(*x* | *y* | *z*) des Raumes ergibt sich aus der Summe der Einzelpotentiale“ ([Hei1] Punkt 6). Diese Erkenntnis fußt auf der einfachen Überlegung, dass die von den Massen ausgehenden Gravitationskräfte vektoriell zu addieren sind, um zu einer resultierenden Kraft zu kommen. Damit müssen auch die Beschleunigungen vektoriell zu addieren sein, so dass man zu einer resultierenden Beschleunigung kommt. Da das Gravitationspotential das Integral der Beschleunigung nach dem Weg ist und bei der Integration die Summenregel gilt, muss auch das Gravitationspotential additiv sein ([Mar] S. 102 Gl. 4.7.34).
Diese Logik kann von der anderen Seite betrachtet werden (vgl. [Her] S. 106). Unterstellt man die additive Überlagerung der potentiellen Energie:

$$E_{pot} = -G\frac{m_0 m_1}{r_1} - G\frac{m_0 m_2}{r_2} - \cdots - G\frac{m_0 m_N}{r_N} \quad \text{([Her] S. 106)} \qquad \text{Gl. 26a}$$

lässt sich daraus durch Spezifizierung auf die Masse m_0 das Potential ermitteln:

$$\varphi_G = -\sum_{k=1}^{N} G\frac{m_k}{r_k} \quad \text{([Her] S. 106 Gl. 2.142)} \qquad \text{Gl. 26b}$$

Strikt zu beachten ist, dass die so dargestellten Überlagerungen der potentiellen Energie und auch des Gravitationspotentials grundsätzlich auf den Vergleich mit den Werten im Unendlichen beziehen.

Bei dem im Bild 5 dargestellten Prozess wird eine Masse m_0 vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 befördert. Es sollte erkennbar sein, dass diese Masse im Gravitationsfeld der Erde eine Potentialsteigerung erfährt. Es wird Energie aufgewendet, um die potentielle Energie der betrachteten Masse zu erhöhen. Im Gravitationsfeld der Sonne hingegen verliert die Masse an potentieller Energie. Der Abstand zur Sonne wird geringer, es wird Energie frei und diese verlorene potentielle Energie wird sicherlich in kinetische Energie umgewandelt.

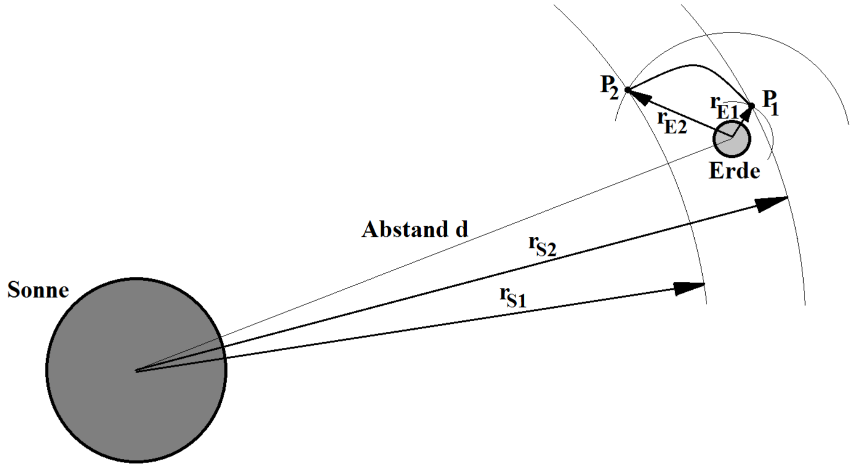

Bild 5: Änderung der potentiellen Energie einer Masse beim Verschieben von P_1 zu P_2

Die Überlagerung dieser beiden Teilprozesse durch Addition der potentiellen Energien ergibt dann:

$$\Delta E_{pot} = -Gm_0\left(\frac{m_{Erde}}{r_{E1}} - \frac{m_{Erde}}{r_{E2}} + \frac{m_{Sonne}}{r_{S2}} - \frac{m_{Sonne}}{r_{S1}}\right) \quad \text{Gl. 27a}$$

Für das Gravitationspotential als die spezifische, potentielle Energie ergibt sich analog:

$$\Delta\varphi = -G\left(\frac{m_{Erde}}{r_{E1}} - \frac{m_{Erde}}{r_{E2}} + \frac{m_{Sonne}}{r_{S2}} - \frac{m_{Sonne}}{r_{S1}}\right) \quad \text{Gl. 27b}$$

Zur Überprüfung sei der Punkt P_2 ins Unendliche verlegt, sodass sich entsprechenden Brüche für den Radius r_{E2} und r_{S1} zu null ergeben. Damit wäre Äquivalenz zu den Gleichungen 26 aufgezeigt.

Interessant ist im Hinblick auf eine Berechnung von Zeitdilatationen, ob sich eine Ersatzmasse berechnen lässt, die für einen anzunehmenden Radius gerade das betrachtete Potential ergibt. Dabei ist von der Betrachtung des Potentials gegen die unendliche Entfernung auszugehen. Das Beispiel der Konstellation Sonne-Erde soll zur Veranschaulichung dienen:

$$\Phi = -G\left(\frac{m_{Erde}}{r_{E1}} + \frac{m_{Sonne}}{r_{S2}}\right) \quad \text{Gl. 28a}$$

$$\Phi = -G\left(\frac{r_{S2}m_{Erde} + r_{E1}m_{Sonne}}{r_{E1}r_{S2}}\right) \quad \text{Gl. 28b}$$

Betrachtet man nun einen Prozess von der Erde aus, ist es sinnvoll, die Gleichung noch zu verändern:

$$\Phi = -G\left(\frac{m_{Erde} + \frac{r_{E1}}{r_{S2}}m_{Sonne}}{r_{E1}}\right) \quad \text{Gl. 28c}$$

Das bedeutet, dass die Masse der Sonne im Abstandsverhältnis r_{E1}/r_{S2} in die Rechnung eingeht. Die Formel wäre auch analog darzustellen, wollte man Prozesse von der Sonne aus betrachten.

Warum das Gravitationspotential die Zeitdilatation nicht bestimmt

An dieser Stelle könnte eingewendet werden, dass die Zeitdilatation in dem hier betrachteten Fall immer aus einem Uhrenvergleich mit einer im Unendlichen laufenden Uhr (vgl. Gl. 23a) ermittelt würde und das Gravitationspotential ebenfalls gegen das Potential im Unendlichen zu betrachtet sei. Bei der Annahme einer solchen Parallele sollte aber beachtet werden, dass das Gravitationspotential an einer Stelle des Raumes nur eine willkürlich festgelegte Größe ist, die im Zusammenhang mit einer zu verrichtenden Arbeit (potentiellen Energie) steht, während sich die Zeitdilatation aus den absolut an Punkten des Raumes unterschiedlich schnell tickenden Uhren ergibt.
Dass sich im Gravitationsfeld einer kugelsymmetrischen Masse ein rechnerischer Zusammenhang zwischen Gravitationspotential und Zeitdilatation aufzeigt, ist bekannt. In den folgenden Ausführungen ist gezeigt, dass dieser Zusammenhang keinen Grund für eine Verallgemeinerung ist.

Wie im oben bereits ausgeführt, gibt es aus der Herleitung der Zeitdilatation (vgl. Gl. 22b) keinen Hinweis darauf, dass es das Gravitationspotential ist, das ursächlich für die Zeitdilatation verantwortlich zu machen wäre. Alleine die Tatsache, dass in der Gleichung der Zeitdilatation (Gl. 25) das Gravitationspotential vorkommt, ist kein Beweis für dessen ursächliche Wirkung auf die Zeitdilatation.
Was also macht das Gravitationspotential in dieser Gleichung?
Es stellt offensichtlich nur eine Rechengröße dar. Letztlich geht es in der Gleichung um den Quotienten r_S/r (siehe Gleichung Gl. 21), der einen direkten Hinweis auf den Gang der Zeit im Gravitationsfeld gibt. Er drückt aus, dass der Gang der Zeit unabhängig von der die Gravitation erzeugenden Masse betrachtet werden kann, wenn die Entfernung von dieser Masse als das besagte Verhältnis r_S/r ausgedrückt wird (vgl. Bild 4).
Dabei ist wegen:

$$a(r) = \frac{MG}{r^2} \text{ und } r_S = \frac{2MG}{c^2} \qquad \text{Gl. 29}$$

$$a(r)r^2 = r_S c^2/2\ . \qquad \text{Gl. 30}$$

Es folgt für den vorgenannten Quotienten:

$$\frac{r_S}{r} = 2a(r)\frac{r}{c^2}, \qquad \text{Gl. 31}$$

woraus nicht hervorgeht, dass es eine weitere Ursache für die Zeitdilatation als die Beschleunigung am Ort r geben könnte.

Um diesen Gedanken noch besser fassen zu können, sei betrachtet, was die Zeitdilatation, die durch die Massen hervorgerufen wird, ausmacht. Dazu dienen die folgenden Gedanken, die als Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen vorangestellt werden:

- der von Gravitation durchzogene Raum ist ein absoluter. Er ist deshalb als solcher anzusehen, weil jeder Punkt des Raumes durch seine an diesem Punkte herrschende Gravitationsbeschleunigung bestimmt ist. Als Ursache für diese Gravitation ist eine Masse anzusehen.
- es muss eine Eigenschaft des absoluten Raumes geben, die den Gang von Uhren beeinflusst. Dass wir für diese Eigenschaft die Krümmung des Raumes heranziehen werden, ist einer späteren Betrachtung vorbehalten.
- eine Uhr wird mit dem durch diese Raumeigenschaft bestimmten Gang gehen.
- Bei Abwesenheit von Gravitation ist die Krümmung des Raumes mit null anzunehmen. Dann ist der Raum eben und euklidisch. Der Gang einer Uhr ist hier am schnellsten.
  In einem ebenen Raum existiert keine durch Gravitation hervorgerufene Kraftwirkung. Im Umkehrschluss muss gelten, dass dort, wo keine gravitative Kraftwirkung existiert, der Raum eben ist.
- die Zeitdilatation selbst geht immer aus einem Vergleich der Uhrengänge unterschiedlicher Raumpunkte hervor.

Damit muss die Ursache für die Zeitdilatation eine eindeutig auf einen Raumpunkt abbildbare Eigenschaft des Raumes sein. Das ergibt sich aus dem Gedanken, dass der Lauf der Uhr an diese am Raumpunkt herrschende Eigenschaft gebunden ist.
Hier kann festgestellt werden, dass das Gravitationspotential keine solche Eigenschaft des Raumes darstellt. Wenn auch oft von einem Gravitationspotential an einer Stelle des Raumes gesprochen wird, so bedeutet dieses Potential nur eine spezifische Energie, die aufzubringen ist, um eine Masse von diesem Punkt ins Unendliche zu verschieben (vgl. UP 1 dieser Anlage).
Wollte man das Potential an einem Punkt des Raumes durch sein Differential ersetzen, es also über eine minimale Höhendifferenz Δh betrachten, erhielte man sofort den Anstieg des Potentials und damit die Gravitationsbeschleunigung am betrachteten Raumpunkt.

Diese Eigenschaft ist seit der Herleitung des Raum-Zeit-Kontinuums durch Einstein (vgl. [Ein1]) die Krümmung des Raumes. Sie misst sich an der Ablenkung des Lichts im Gravitationsfeld. Insofern ist also mit der Masse die Gravitation selbst die Ursache für diese Ablenkung, damit auch für die Krümmung des Raumes und letztlich für die Zeitdilatation.
In seiner Erklärung geht Einstein davon aus, dass das Linienelement des Raumes in der vierdimensionalen Welt eine Konstante ist. Damit diese Konstante aus beliebigen Koordinatensystemen als solche wahrgenommen wird, ergibt sich als eine Konsequenz, dass das Zeitverhalten von Uhren entsprechend dem Krümmungsverhalten des Raumes unterschiedlich ist und Bewegungsabläufe unterschiedlich schnell wahrgenommen werden.

Folgt man dem Gedanken, dass die Krümmung des Raumes in einem Raumpunkt in direkter Beziehung zur an diesem Punkt wirkenden Beschleunigung steht, bedeutet eine Überlagerung von Gravitationsfeldern die Bildung eines resultierenden Gravitationsfeldes entsprechend den Regeln der Vektorrechnung. Für jeden Punkt des resultierenden Feldes

ergibt sich die dort wirkende Gravitation aus der vektoriellen Addition der Gravitationsbeschleunigungen der einzelnen Felder.
Damit ist aber unschwer zu erkennen und festzustellen, dass es zwischen zwei Massen grundsätzlich einen Punkt (den Gleichgewichtspunkt) geben muss, in welchem sich durch diese Vektoraddition die resultierende Gravitation aufhebt und der Raum dort ungekrümmt ist.

Und hier zeigt sich die Unzulänglichkeit des Gravitationspotentials als Maß für die Zeitdilatation, wenn man sich durch mehrere Massen überlagerte Gravitationsfelder vorstellt. In einem solchen Fall überlagerter Gravitation geht eine Uhr im Gleichgewichtspunkt des resultierenden Feldes genauso schnell, wie es die Uhr im Unendlichen tut, da sich beide Uhren im gravitationsfreien (also ebenen) Raum befinden. Das zu diesem Punkte gehörende Gravitationspotential sollte definitiv ungleich null sein, weil es trotz alledem eine Arbeit erfordert, eine Masse von diesem Punkt bis ins Unendliche zu befördern.

Die Zeitdilatation bei überlagerten Gravitationsfeldern

Es ist letztlich zu untersuchen, wie sich die Zeitdilatation verhält, wenn sich mehrere Gravitationsfelder unterschiedlicher Massen in einem Punkte überlagern. Mit dieser Untersuchung rückt die Lösung des gesamten Gravitationspotential-Problems in greifbare Nähe. Ihr Ausgang entscheidet darüber, ob das Gravitationspotential vielleicht doch als Ursache für die Zeitdilatation anzusehen ist. Wenn die Betrachtung im Gravitationsfeld einer rotationssymmetrischen Masse zu Vermutungen hinsichtlich des Verhaltens der Zeitdilatation führt, dann werden sich diese auch bei überlagerten Gravitationsfeldern bestätigen müssen.

Wesentlich ist es, einen geeigneten Ansatzpunkt für das Verhalten von Uhren in überlagerten Gravitationsfeldern zu finden. Dazu sind die folgenden Gedanken hilfreich:

Vorbetrachtungen
Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass es sich um schwache Gravitationen handelt und die bekannten Gleichungen Anwendung finden dürfen. Damit soll auch hier die Zeitdilatation als eine Funktion einer noch zu bestimmenden Summe der gravitativen Wirkung einzelner Massen abgeleitet werden können. Dementsprechend stellt sich die Gleichung für den Zeitgang einer Uhr im Gravitationsfeld zweier Massen im Vergleich zur im Unendlichen laufenden Uhr nach Gleichung Gl. 25 wie folgt dar:

$$t = t_\infty \sqrt{1 - \frac{2}{c^2} f(\Phi_1 + \Phi_2)} \qquad \text{Gl. 32}$$

Mit der Funktion $f(\Phi_1 + \Phi_2)$ wird ausgedrückt, dass jetzt noch nicht bekannt ist, in welcher Weise die Überlagerung der Potentiale auf die Zeitdilatation wirkt.

Die Möglichkeit, Potentiale in skalarer Weise additiv zu verknüpfen, ist ohne auswertbaren Nutzen für den Rückschluss auf die Zeitdilatation, weil die Potentiale nach Gleichung Gl. 32 in einer Funktion stecken, die diese vorteilhafte Eigenschaft zu Nichte machen dürfte. Möglich wäre die additive Überlagerung nur, wenn man von einem vektoriellen Charakter der Gravitationspotentiale absieht und sie als Skalare behandelt. Da die Gleichung Gl. 32 suggeriert, dass man davon nicht ausgehen kann, bedeutet diese Gleichung, dass die additive Überlagerung von Potentialen nicht auf die Zeitdilatationen übertragbar ist.
Bewegt man sich aber in einem Bereich schwacher Felder, wie sie im Sonnensystem existieren, kann man davon ausgehen, dass der lineare Zusammenhang der Potentialüberlagerung auch für die Zeitdilatation gilt.

$$\frac{\Delta t}{t_\infty} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\Phi}{c^2}} \qquad \text{Gl. 33}$$

Mit dem Wissen, dass der nun folgende Zusammenhang nur für schwache Gravitationsfelder wie beispielsweise dem der Sonne angewendet werden darf, lässt sich verallgemeinernd feststellen:

$$1 - \frac{dt}{d\tau} \sim \Phi \qquad \text{Gl. 34}$$

Dass ein solcher Zusammenhang seine Berechtigung hat, sollte nicht verwundern. Er ließe sich auch bereits aus der Gleichung Gl. 7 ableiten.

Der vektorielle Charakter des Potentials

In jeder Beschreibung des Gravitationspotentials als eine spezifische Arbeit wird im Ergebnis dargestellt, dass es sich dabei um eine skalare Größe handelt. Das bedeutet, dass bei der Integration der Gravitation aus einem Vektor ein Skalar wird. Die Information über die Richtung der Gravitation geht in diesem Prozess verloren, weil es für eine Verschiebung im Gravitationsfeld für die zu leistenden Arbeit unerheblich ist, in welche Richtung die aufsummierte Gravitation wirkte, solange es sich bei dem Gravitationsfeld um ein konservatives Feld handelt.
Das mag auch alles so funktionieren, solange die Wirkungsrichtung der Gravitation grundsätzlich bekannt ist und immer zum Massenschwerpunkt zeigt. Bei der Betrachtung zweier oder mehrerer Massen, deren Gravitationsfelder sich überlagern, ist es aber nicht mehr gleichgültig. Weil die Gravitation eine vektorielle Größe ist, erfolgt die Überlagerung der Gravitationsfelder vektoriell. Die Integration dieser sich überlagernden Vektoren ist von der Richtung der einzelnen Vektoren sehr wohl abhängig. Ergäbe sich dabei ein Skalar, sollte es schwer fallen, bei einer Rückrechnung auf die Richtung der daraus folgenden Gravitation zurückzuschließen.
Damit ergibt sich in Vorbereitung einer Überlagerung von Gravitationsfeldern die folgende Vorstellung von einem am betrachteten Ort existierenden Potential. Dem Raum wird ein vektorielles Potentialfeld zugeordnet. Damit ergibt sich das Potential als

Vektorsumme der einzelnen Potentiale der sich überlagernden Einzelpotentiale (vgl. [Jes] S. 12 ff).
Es gibt eine bestechende Parallele zwischen dem Potential als spezifische Arbeit zwischen zwei betrachteten Höhenpunkten im Gravitationsfeld zur Zeitdilatation. Diese ist, dass sich genau wie das Potential auch die Zeitdilatation als eine Relation der Zeitläufe von Uhren zwischen diesen betrachteten Raumpunkten ergibt.
Festzustellen bleibt aber, dass der Zeitlauf einer Uhr an einem Raumpunkt immer derselbe ist und eine skalare Größe bleibt.

Wahrnehmung des Potentials

Es wurde oben gezeigt, wie sich Gravitationspotentiale überlagern. Die dort getroffene Aussage, dass sich Potentiale einfach kumulieren, hilft bei der hier angestellten Betrachtung nicht weiter. Das geht aus dem Bild 4 hervor. Dort sind Uhren dargestellt, die in Abhängigkeit von der Masse und dem Abstand, der als Vielfaches des Schwarzschild-Radius angegeben wurde, einen eindeutig vorbestimmten Lauf haben. Dieser Lauf als Relation zu einer unendlich entfernten Uhr berechnet sich nach Gleichung Gl. 23a. Was aber aus dem Bild nicht hervor geht, ist ein Vergleich der Läufe von Uhren, die sich in unterschiedlichen Potentialen befinden. Sollte dieser Vergleich im Gravitationsfeld einer einzelnen Masse angestellt werden, ist die benannte Gleichung noch anwendbar. Betrachtet man aber den Lauf von Uhren in sich überlagernden Gravitationsfeldern verschiedener Massen, wird es problematisch, zu richtigen Ergebnissen zu gelangen. Dabei zeigt sich das Problem nicht in der Möglichkeit die Gleichung erneut anzuwenden. Die Frage, die beantwortet werden muss, ist die nach der Bewertung des Potentials eines Beobachters.

Damit ergibt sich der Ansatz für die Lösung der Überlagerung von Gravitationspotentialen zur Auswertung von Zeitdilatationen in der Suche nach der Masse, die eine bestimmte Zeitdilatation hervorruft.
Zu diesem Zweck wird im Bild 6 eine Situation dargestellt, die das Problem genauer umschreibt.
Auf einer Masse M_E (bspw. der Erde) habe ein Beobachter eine Uhr U_1 aufgestellt, deren Lauf nur durch das Gravitationsfeld dieser Masse M_E beeinflusst sein soll. Genauso soll eine Uhr U_2 von dieser Masse M_E entfernt aufgestellt sein, deren Beeinflussung lediglich durch das Gravitationsfeld einer anderen Masse M_S (bspw. der Sonne) erfolgt.
Da der Lauf der Uhr U_2 durch die Masse M_S eindeutig bestimmt ist, der Beobachter auf der Erde also den absoluten Lauf dieser Uhr mitverfolgen kann, wird er diesen mit der bei ihm befindlichen Uhr U_1 vergleichen. Da seine Uhr U_1 aber einen anderen Lauf haben wird, als eine hypothetische Vergleichsuhr bei der Masse M_S, wird er auch annehmen, dass das Potential, in welchem sich die Uhr U_2 befindet, ein anderes ist, als sich durch Berechnung aus dem Abstand a_S und der Masse M_S der Sonne ergibt.

Sucht nun der Beobachter die zusätzliche Masse M_Z, um die die Erdenmasse M_E schwerer sein muss, den registrierten Lauf der Uhr U_2 zu begründen, kann er auf das Potential schließen, dem er die Uhr U_2 ausgesetzt sieht.

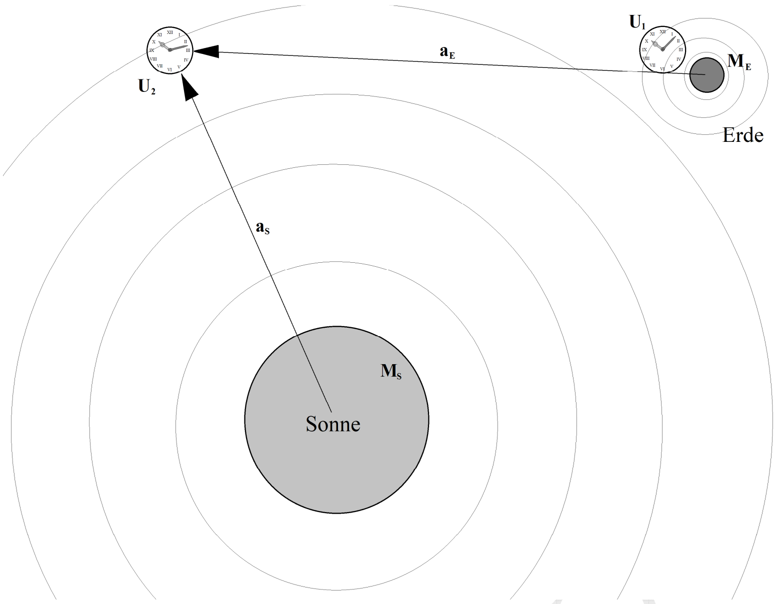

Bild 6: Betrachtung von Uhren unterschiedlichen gravitativen Einflusses

Er wird nun der Logik des Bildes Bild 4 folgen und schließen, dass für eine Uhr unabhängig von der Masse, von der aus sie betrachtet wird, immer gelten muss, dass sie sich am Ort r_S / r dieser Masse befindet. Es gilt für ihn nach Gleichung Gl. 29 ein Schwarzschildradius der Sonne $r_{SS} \sim M_S$ und $r_{SE} \sim M_E$. Damit kommt er entsprechend der Gleichung Gl. 33 zur folgenden Beziehung

$$\frac{t_{U2}}{t_\infty} = \sqrt{1 - \frac{r_{SS}}{a_S}} = \sqrt{1 - \frac{r_{SE}}{a_E}}, \qquad \text{Gl. 35}$$

in welcher der mittlere Term den Lauf der Uhr U_2 aus Sicht eines Sonnenbeobachters und der rechte Term diesen Lauf aus Sicht des Erdenbeobachters ermittelt.

Um von einem aus den Sonnendaten berechneten Potential zu den Vergleichswerten aus der Sicht der Erde zu gelangen, muss dieser Beobachter das Potential der Sonne Φ_S nur entsprechend umrechnen. Diese Umrechnung erfolgt durch Einbringung des Anpassungsfaktors u:

$$u = \frac{a_S}{r_{SS}} \frac{r_{SE}}{a_E} = \frac{a_S}{M_S} \frac{M_E}{a_E} \qquad \text{Gl. 36}$$

Die Zeitdilatation zur Uhr U_2, die sich aus dem Gravitationsfeld der Sonne auf der Uhr U_1 für den Beobachter auf der Erde ergibt, ist dann durch die folgende Gleichung für schwache Gravitationsfelder korrekt bewertet:

$$\frac{\Delta t_{U2}}{t_\infty} = 1 - \sqrt{1 - 2u\frac{\Phi_S}{c^2}} \qquad \text{Gl. 35}$$

Der Grund also, warum der Erdenbeobachter das durch die Sonnengravitation erzeugte Potential anders bewertet, als es sich nach der Rechnung darstellt, liegt darin, dass seine Uhr, die als Vergleichsuhr dient, einem anderen Lauf folgt, als es eine Uhr auf der Oberfläche der Sonne tun würde. Damit ist das Vergleichsnormal des Erdbeobachters zur Bewertung des Sonnenpotentials ein anderes.
Zu beachten hat der Beobachter nur noch, dass auch seine Uhr der Überlagerung des Gravitationsfeldes der anderen Masse M_S unterliegt und dabei die Richtungsabhängigkeit der sich überlagernden Gravitationsfelder zu berücksichtigen ist.

Das Maryland-Experiment

Mit dem Maryland-Experiment ein Zeitdilatationsexperiment in einer qualitativ hohen Stufe durchgeführt. „Eine Forschergruppe der Universität von Maryland (USA) führte den Versuch von Hafele und Keating sozusagen seriös durch. Anstelle gewöhnlicher Verkehrsflugzeuge auf nicht genau bekannten Kursen wurde ein Flugzeug der US-Navy verwendet, dessen Kurs während des ganzen Fluges sehr genau aufgezeichnet wurde. Dieses Flugzeug konnte bis zu 15 Stunden seine Runden drehen und bis in eine Höhe von 35‘000 Fuss [sic] aufsteigen. Dabei wurde schon während des Fluges die Zeit der drei Atomuhren an Bord mit derjenigen der drei Uhren derselben Bauart am Boden verglichen, indem ständig Laserpulse mit einer Pulsbreite von 0.1 ns ausgetauscht wurden. Die drei fliegenden Uhren wurden sogfältig gegen Erschütterungen, Temperaturschwankungen, Druckunterschiede und Einflüsse des Magnetfeldes abgeschirmt, und die baubedingten Differenzen zwischen den beteiligten 6 Atomuhren wurden vor, zwischen und nach den Flügen genau ausgemessen und rechnerisch korrigiert“ ([Eck] S. 145).
Eine detaillierte Beschreibung findet sich in der Veröffentlichung des Ausführenden (siehe [All]).
Wesentlich für die folgend auszuführende Simulation ist lediglich, dass in diesem Experiment der Lauf von Uhren über jeweils 5 Stunden in drei unterschiedlichen Höhen durchgeführt wurde. Damit sollte die Auswertung von Wirkungen der Gravitation unterschiedlicher Höhen auf die entsprechende Zeitdilatation ausreichend nachvollzogen werden können.

Aufbau der Excel-Tabelle zur Darstellung der Gleichungen

Mit diesen durchgeführten Betrachtungen ist die Durchführung des Experiments von Maryland mittels einer Excel-Tabelle zu simulieren. Zu diesem Zwecke sind die Daten nach der Tabelle Tab 1 bereitzustellen.

	A	B	C	D	E
	Bezeichnung	**Abk**	**Wert**	**ME**	**Bemerkungen**
5	Abstand Sonne Erde	a	1,47772E+11	m	am 22.11.1975 0:00 Uhr ermittelt aus [Bar]
6	Änderung Abstand Sonne-Erde	Δa	1227000	m/h	ermittelt aus [Bar]
7	Neigung gegen Ekliptik	δ	15,7	°	ermittelt aus [Bar]
8	nördl. Breite	NBR	38,25	°	Hoopersville (goole Maps)
9	Radius der Erde	R_e	6371000	m	
10	Radius1 des Flugzeugs	R_{Fl1}	6378620	m	=$C$9+25000*0,3048
11	Radius2 des Flugzeugs	R_{Fl2}	6381044	m	=$C$9+30000*0,3048
12	Radius3 des Flugzeugs	R_{Fl3}	6381668	m	=$C$9+35000*0,3048
13	Masse der Sonne	M_S	1,99E+30	kg	
14	Masse der Erde	M_E	5,97E+24	kg	
15	Gravitationskonstante	G	6,67E-11	m3/kgs2	
16	Lichtgeschwindigkeit	c	299792458	m/s	
17	Schwarzsch_Rad_Sonne	R_{SS}	2955,4789	m	=2*C15*C13/C16/C16
18	Schwarzsch_Rad_Erde	r_{SE}	0,0089	m	=2*C15*C14/C16/C16
19	Startzeit	t_S	15,80	Uhr	≡ 15:48 Uhr
20	Umlauffrequenz	f_U	0,2618	1/h	=2*PI()/24
21	Umrechnungsfaktor	u	2,1244E+12	-	=C17/C18*C9
22	Faktor	f	1,00E+09	-	Hilfsgröße
23	Schrittweite	Δ	0,018	h	

Tab 1: Daten zur Simulation des Maryland-Experiments

Die in der Tabelle Tab 1 grau unterlegten Werte sind nach der in der Spalte „Bemerkungen“ stehenden Formel berechnet. Sie sollten deshalb nicht einfach überschrieben werden. Die weiteren Werte sind der einschlägigen Literatur entnommen und der Abstand der Erde von der Sonne wurde für das angegebene Datum mit einem Astronomie-Programm berechnet.

Im Folgenden wird der Aufbau der Excel-Tabelle zur Simulation des Maryland-Experiments beschrieben. Die Excel-Tabelle ist aus Platzgründen zweigeteilt. Diese Teilung ist anhand der Spaltenbezeichnung nachzuvollziehen:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
26	Zeit	Abstand	P1_B_X	P1_B_Y	P2_F_X	P2_F_Y	a_S_B	a_S_F	r_E_B
27	0	1,496E+11	1,496E+11	6,178E+06	1,496E+11	6,185E+06	1,496E+11	1,496E+11	6,371E+06
28	0,02	1,496E+11	1,496E+11	6,183E+06	1,496E+11	6,190E+06	1,496E+11	1,496E+11	6,371E+06
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

304	4,99	1,496E+11	1,496E+11	4,722E+06	1,496E+11	4,728E+06	1,496E+11	1,496E+11	6,371E+06
305	5,00	1,496E+11	1,496E+11	4,707E+06	1,496E+11	4,713E+06	1,496E+11	1,496E+11	6,371E+06
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
582	9,99	1,496E+11	1,496E+11	3,437E+06	1,496E+11	3,442E+06	1,496E+11	1,496E+11	6,371E+06
583	10,01	1,496E+11	1,496E+11	3,453E+06	1,496E+11	3,458E+06	1,496E+11	1,496E+11	6,371E+06
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
861	15,01	1,496E+11	1,496E+11	6,371E+06	1,496E+11	6,381E+06	1,496E+11	1,496E+11	6,371E+06

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
26	r_E_F	Φ _S_B	Φ_S_F	Φ_E_B	Φ _E_F	gR_B	gR_F	t1/t2	Int
27	6,379E+06	6,256E+07	6,256E+07	6,256E+07	6,249E+07	7,692E+07	7,687E+07	1,84	0,00
28	6,379E+06	6,256E+07	6,256E+07	6,256E+07	6,249E+07	7,707E+07	7,703E+07	1,84	0,03
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
304	6,379E+06	6,256E+07	6,256E+07	6,256E+07	6,249E+07	1,144E+08	1,143E+08	2,74	11,60
305	6,380E+06	6,256E+07	6,256E+07	6,256E+07	6,247E+07	1,145E+08	1,144E+08	3,29	11,65
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
582	6,380E+06	6,256E+07	6,256E+07	6,256E+07	6,247E+07	1,201E+08	1,200E+08	3,45	28,92
583	6,382E+06	6,256E+07	6,256E+07	6,256E+07	6,246E+07	1,200E+08	1,199E+08	4,02	28,99
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
861	6,382E+06	6,256E+07	6,256E+07	6,256E+07	6,246E+07	8,883E+07	8,876E+07	2,97	46,88

Tab. 2: Simulations-Excel-Tabelle zum Maryland-Experiment

Die Tabelle Tab 2 zeigt die sich aus den unten beschriebenen Formeln ergebenden Werte. Die Bedeutung der Spalteninhalte wird im Nachgang erläutert. Die Strukturierung der Zeilen dokumentiert die Sprünge in der Höhe des Flugzeugs. Diese Höhe wurde nach jeweils 5 Stunden geändert. Die Bezeichnungen der Spalten „E“, „F“ und „J“ sind grau hinterlegt. Damit ist angedeutet, dass sich in diesen Spalten die Formeln bezüglich der Höhe ändern werden. Diese Änderungen finden dann von Zeile „304“ zu „305“ und „582“ zu „583“ statt.

Spalte A: Zeit (Zeitablauf des Experiments)

Diese Spalte nimmt zur Darstellung der Chronologie die Zeit des Experiments auf. Sie beginnt in Zeile „27“ mit null und wird ab Spalte „28“ in der Schrittweite fortgeführt die im Feld „$C$23“ eingetragen ist. Das wird mittels der Gleichung „A28=A27+$C$23“ erreicht. Die Schrittweite ist mit 0,018 so festgelegt, dass der gesamte Zeitraum des Experimentes betrachtet wird und die Änderungen der Flughöhe in den oben beschriebenen Zeilen stattfindet. Daraus ergibt sich dann die Restriktion, dass die Schrittweite im Feld „C23“ nicht geändert werden sollte. Die Werte in der Spalte „A“ sind gerundet dargestellt, sodass sich Abweichungen vom Vielfachen der Schrittweite ergeben können.

Spalte B: Abstand (Abstand der Mittelpunkte Sonne-Erde)

Sicherlich ist es annehmbar, dass über den Zeitraum der Durchführung des Experimentes von 15 Stunden der Abstand Sonne-Erde als konstant deklariert wird. Da es aber in einer Excel-Tabelle keine Umstände macht und sich der Abstand Sonne-Erde definitiv ändert, soll der Abstand als Funktion der Zeit betrachtet werden und in der Spalte „B“ seinen Niederschlag finden.
Dazu wird die Änderung des Abstandes berechnet. Es werden die beiden folgenden Abstände aus [Bar] ermittelt:
22.11.1975 0:00 Uhr: 147771127.8 km
23.11.1975 0:00 Uhr: 147741687.2 km
Gibt man eine lineare Änderung vor, folgt der Interpolationsfaktor (oder Anstieg dieser Änderung) zu 1227 km/h. Dieser Wert findet sich dann im Feld „C6“ wieder.
Der momentane Abstand Sonne-Erde berechnet sich nach „B27=$C$5-($C$19+A27)*$C$6“.

Spalte C: P1_B_X (x-Koordinate des Beobachters am Punkt P1 auf der Erde)
Spalte D: P1_B_Y (y-Koordinate des Beobachters am Punkt P1 auf der Erde)
Spalte E: P2_F_X (x-Koordinate des Flugzeugs am Punkt P2 über der Erde)
Spalte F: P2_F_Y (y-Koordinate des Flugzeugs am Punkt P2 über der Erde)
Am Punkt P1 befinde sich der Beobachter auf der Erde, der im Patuxent Naval Air Test Center mit seiner Uhr den Versuchsablauf verfolgt. Das Flugzeug hingegen, welches mit der Vergleichsuhr die Runden in unterschiedlichen Höhen flog, soll sich im Punkt P2 befinden. Die Punkte beziehen sich auf ein Koordinatensystem, dessen Koordinatenursprung sich im Zentrum der Sonne befindet und dessen x-Achse mit der Verbindungslinie Sonne-Erde übereinstimmt. Die y-Achse steht orthogonal zur x-Achse und liegt in der Ebene, die von der x-Achse und der Erdachse aufgespannt wird. Diese Richtung ändert sich durch die Erddrehung mit der Zeit der Umrundung der Erde um die Sonne. In dieser Ebene kann auch die Position des Flugzeugs angenommen werden, wenn man davon ausgeht, dass sich das Flugzeug senkrecht über dem Beobachter befindet und der Erdmittelpunkt zwangsweise in dieser Ebene liegen muss.
Der rechnerische Hintergrund für die Bestimmung der Komponenten der Punkte P1 und P2 wird in [Syd3] erläutert. Dabei ist zu beachten, dass für die Betrachtung der Gravitationsfelder der Himmelskörper wegen der Rotationssymmetrie die y- und die z-Komponente zu einer Resultierenden zusammengefasst werden müssen. Damit ergeben sich die in die Excel-Tabelle einzufügenden Formeln zu:
„C27=B27+$C$9*(SIN($C$8/180*PI())*SIN($C$7/180*PI())+COS($C$8/180*PI())*COS($C$7/180*PI())*COS($C$20*A27+PI()/12*$C$19))”
„D27=$C$9*WURZEL(POTENZ(SIN($C$8/180*PI())*COS($C$7/180*PI())-COS($C$8/180*PI())*SIN($C$7/180*PI())*COS($C$20*A27+PI()/12*$C$19);2)+POTENZ(COS($C$8/180*PI())*SIN($C$20*A27+PI()/12*$C$19);2))”

In die Spalten “E” und “F” sind dieselben Formeln einzutragen, nur mit dem Unterschied, dass für die Werte des Radius (grau hinterlegt) die entsprechenden Werte des Flugzeugs einzutragen sind. Dort stehen dann für die verschiedenen Höhenbereiche die folgenden Werte:

Zeile	**Höhe**	**Zeitbereich**	**Excel-Feld**
27 bis 304	25000 ft	die ersten 5 Stunden	$C$10
305 bis 582	30000 ft	die zweiten 5 Stunden	$C$11
583 bis 861	35000 ft	die dritten 5 Stunden	$C$12

Tab 3: Zugriff auf die unterschiedlichen Höhen des Flugzeugs

Spalte G: a_S_B (Abstand vom Sonnenmittelpunkt zum Beobachter auf dem Boden)
Für die Bewertung des Gravitationspotentials der Sonne am Ort des Beobachters ist der korrekte Abstand des Beobachters zum Sonnenmittelpunkt zu bestimmen. Dieser wird in einfacher Weise über den Pythagoras aus den x- und y-Komponenten des Beobachters berechnet:
„G27=WURZEL(C27*C27+D27*D27)“
Spalte H: a_S_F (Abstand vom Sonnenmittelpunkt zur Uhr im Flugzeug)
Für das Flugzeug ist dieser Abstand in gleicher Weise zu bestimmen:
„H27=WURZEL(E27*E27+F27*F27)“
Spalte I: r_E_B (Abstand vom Erdmittelpunkt zum Beobachter auf dem Boden)
Für die Bewertung des Gravitationsfeldes der Erde sind analoge Daten bereitzustellen. Hier kann davon ausgegangen werden, dass der Abstand über die Zeit konstant dem Erdradius ist
„I27 =$C$9“
Spalte J: r_E_F (Abstand vom Erdmittelpunkt zur Uhr im Flugzeug)
Für die Ermittlung des Abstandes der Uhr im Flugzeug gilt die Tabelle Tab 3. Über die dort aufgeführten Bereiche wird der Radius konstant bleiben.
Spalte K: Φ _S_B (Gravitationspotential der Sonne aus Sicht und am Ort des Beobachters)
Spalte L: Φ _S_F (Gravitationspotential der Sonne aus Sicht des Beobachters und am Ort des Flugzeugs)
Das Gravitationspotential zu berechnen ist einfach. Es ergibt sich aus dem Produkt von Gravitationskonstante mal der Masse des erzeugenden Himmelskörpers dividiert durch den Abstand. Da sich aber die Uhr, mit der dieses Potential bewertet werden soll, beim Beobachter auf der Erde befindet, muss eine Umrechnung vorgenommen werden. Diese Umrechnung ergibt sich aus dem Abstand des Beobachters von der Sonne durch den Umrechnungsfaktor aus dem Feld „C21“.
„K27 =$C$15*$C$13/G27/$C$21*B27“
Das Gleiche gilt für das Potential, in welchem sich das Flugzeug aufhält:
„L27 =$C$15*$C$13/H27/$C$21*B27“
Spalte M: Φ _E_B (Gravitationspotential der Erde aus Sicht und am Ort des Beobachters)
Spalte N: Φ _E_F (Gravitationspotential der Erde aus Sicht des Beobachters und am Ort des Flugzeugs)

Die Betrachtung des Gravitationspotentials der Erde ist nun wieder einfach, weil sich die Uhr des Beobachters in selbigem befindet. Eine Umrechnung entfällt damit:
„M27=$C$15*$C$14/I27“
„N27 =$C$15*$C$14/J27“
Spalte O: gR_B (resultierendes Gravitationspotential am Ort des Beobachters)
Spalte P: gR_F (resultierendes Gravitationspotential am Ort des Flugzeugs)
Wie im oben ausgeführt wurde, muss die Richtung der das Potential hervorrufenden Gravitation Eingang in die Rechnung haben. Insofern sind für weitere Betrachtungen des Gravitationspotentials an einem Ort die richtungsabhängigen Einzelpotentiale zu berücksichtigen. Das geschieht mit den Formeln in der Excel-Tabelle:
„O27=WURZEL((K27/$G27*C27+M27/I27*(C27-B27))*(K27/G27*C27+M27/I27*(C27-B27))+(K27/G27*D27+M27/I27*D27)*(K27/G27*D27+M27/I27*D27))“
und
„P27=WURZEL((L27/H27*E27+N27/J27*(E27-B27))*(L27/H27*E27+N27/J27*(E27-B27))+(L27/H27*F27+N27/J27*F27)*(L27/H27*F27+N27/J27*F27)+$P$24)“
Spalte Q: t1/t2 (Berechnung des Zeitdilatationsfaktors)
Der Zeitdilatationsfaktor leitet sich aus der Gleichung Gl. 25 ab. Hier wird das Verhältnis der unterschiedlichen Läufe der Uhren am Boden und im Flugzeug gebildet. Die Formel in der Excel-Tabelle lautet:
„Q27 =(1-WURZEL((1-2*O27/$C$16/$C$16)/(1-2*P27/$C$16/$C$16)))*$C$22*3600“
In dieser Formel versteckt sich der Faktor $f = 10^9$ aus der Zelle „C22“, der die Umrechnung des Zeitdilatationsfaktors in Nanosekunden vornimmt. Um das aber korrekt ausführen zu können, ist noch die Umrechnung von Stunden in Sekunden durch Multiplikation mit 3600 vorzunehmen.
Spalte R: Int (Berechnung der Zeitdilatation in Abhängigkeit der Flugzeit)
Im letzten Schritt der Berechnung der Zeitdilatation, wird in der Spalte „R“ das Integral über den Zeitdilatationsfaktor gebildet. Dazu ist in die Zelle „R27“ der Beginn der Integration mit Null einzutragen. Danach erhält die folgende Zelle die Formel:
„R28=R27+Q28*$C$23“
In dieser Formel wird zum vorangegangenen Wert der Integration der Zeitdilatationsfaktor, der mit der Schrittweite aus Zelle „C23“ bewertet wurde, addiert

Schlussfolgerungen

Nun ist es möglich, mit dieser aufgebauten Excel-Tabelle das Maryland-Experiment auf rechentechnischem Weg nachzuvollziehen.

Durch Variation der Startzeit im Feld „C19“ der Excel-Tabelle können die zu erwartenden Ergebnisse des Experimentes beeinflusst werden. Da in der Ausführung der Versuchsdurchführung (siehe [All]) keine Angaben über die Startzeit des Versuchs gemacht wurden, ist es mittels der Simulation möglich, durch Variation der Startzeit gerade den Zeitpunkt zu finden, der den realen Versuchsergebnissen am nächsten kommt. Diese Startzeit wurde mit etwa 15:55 Uhr ermittelt. Dass dieser Startpunkt real sein kann, ergibt sich aus der Angabe in [All], dass der Start so gewählt wurde, dass die meisten Nachtstunden enthalten sein sollte, weil bei Dunkelheit die Maschine besser auszumachen war, um die Signale zu empfangen.

Sammelt man die in der Simulation gewonnenen Daten, ergibt sich das Ergebnisdiagramm (Bild 7) wie unten gezeigt. Es ist zu entnehmen, dass die Zeitdilatationen empfindlich vom Startzeitpunkt abhängen.

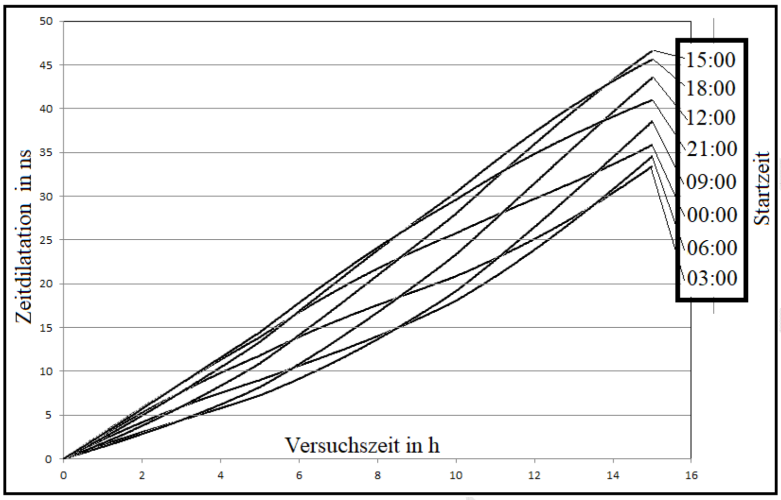

Bild 7: mögliche Versuchsergebnisse

Dabei erscheint es verwunderlich, dass gerade der Startpunkt um 15:00 Uhr zu der maximalen Zeitdilatation führt. Da aber im Vorfeld der Auswertung ein plausibler Grund für die Wahl dieses Startzeitpunktes gegeben wurde, ist hier von einem zufälligen Ereignis auszugehen.

Die Simulation ergibt mit den erzielten Daten ausreichend Grund, das Experiment zu anderen Tageszeiten zu wiederholen, um die hier erörterte Theorie zu verifizieren.
Anderenfalls bleibt nur zu konstatieren, dass die Auswertung des Maryland-Experimentes als Beweis für die ART und die SRT mehr als fragwürdig ist!

Literatur

[All] Alley, C. O.: Relativity and Clocks
33rd Annual Symposium on Frequency Control Atlantic City (NJ, USA) (30.05.1979) cited 18.03.2014
http://ieeexplore.ieee.org/document/1537236/?arnumber=1537236

[Bar] Barmettler, A.: Sonne/Mond-Formeln in Javascript
google Langnau am Albis (Schweiz) (07.11.2017) cited 14.12.2017
http://lexikon.astronomie.info/java/sunmoon/

[Eck] Eckstein, D.: Epstein erklärt Einstein
genius media AG Frauenfeld (Schweiz) 14.10.2008
http://www.relativity.li/epstein/pdf-downciteds.html

[Ein1] Einstein, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie
Annalen der Physik IV Bd. 49 unbekannt (20.03.1916) cited 27.07.2014
http://www.itp.kit.edu/~schreck/general_relativity_seminar/Die_Grundlage_der_allgemeinen_Relativitaetstheorie.pdf

[Ein2] Einstein, A.: Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes
Annalen der Physik 35 Prag (21.06.1911) cited 28.04.2014
http://www.itp.kit.edu/~schreck/general_relativity_seminar/Ueber_den_Einfluss_der_Schwerkraft_auf_die_Ausbreitung_des_Lichtes.pdf

[Ein3] Einstein, A,: Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie
google unbekannt (1917) Cited 06.01.2012
http://www.ideayayinevi.com/metinler/relativitetstheorie/oggk00.htm

[Fli] Fließbach, T.: Allgemeine Relativitätstheorie
Springer Spektrum Heidelberg 7. Aufl. (2016) cited 11.02.2023
https://vdoc.pub/download/allgemeine-relativittstheorie-78oukqb4v730

[Föl] Föll, H.: Potential
Christian-Albrechts-Universität Kiel Kiel cited 10.02.2018
http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_7.pdf

[Hei1] Heidorn, D.: Gravitation
google Hamburg cited 14.03.2014
http://www.dieter-heidorn.de
(Physik Studienstufe\Gravitation\5. Potentielle Energie und Gravitationspotential)

[Hei2] Heidorn, D.: Variable Lichtgeschwindigkeit in der Allgemeinen Relativitätstheorie
google Hamburg cited 30.12.2011
http://www.d1heidorn.homepage.t-online.de/Physik/Variables_c/Variables_c.html

[Her] Hering, E. et al.: Physik für Ingenieure

Springer-Verlag Berlin Heidelberg   Berlin   10. Aufl.   2007

[Jes] Jeschke, H.:   Theoretische Mechanik
Universität des Saarlandes   Saarbrücken   (WS 2007/08) cited 16.02.2013
http://itp.uni-frankfurt.de/~jeschke/TPI/script.pdf

[Mar] Marti, O.:   Vorlesungsskript, PHYS1000 Mechanik
Universität Ulm   Ulm   (24.10.2014) cited 03.04.2017
http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/krm-2008-2009/krm-2008-2009.pdf

[Mes] Meschede, D.:   Gerthsen Physik
Springer Verlag   Heidelberg   24. Aufl.   (2010) cited 26.02.2012
http://www.springerlink.com/content/978-3-642-12894-3#section=782231&page=1&locus=6

[Mül] Müller, A.:   Schwarzschild-Radius
Spektrum.de   München   (2014) cited 09.01.2018
http://www.spektrum.de/lexikon/astronomie/schwarzschild-radius/432

[Scu] Schulz, J.:   Nicht die Beschleunigung macht die Zeit
google   Hamburg   (25.01.2014) cited 29.01.2014
http://www.scilogs.de/quantenwelt/nicht-die-beschleunigung-macht-die-zeit

[Scr] Schremser,H.; Bausch, H.:   Elektrotechnik für Fachschulen, Grundwissen
B. G. Teubner   Stuttgart   4. Aufl.   (1988) cited 09.12.2017
https://books.google.de

[Syd1] Sydow, R. Energie im Kraftfeld, Niederfinow (Deutschland) 04.06.2022
https://rolfswelt.de/physik/#mechanik-energie-im-kraftfeld

[Syd2] Sydow, R. Die Größen n-ter Ordnung, wie man ein Polynom herstellt
Niederfinow (Deutschland) 02.06.2022
https://rolfswelt.de/mathematik/#reihen-taylor-reihe

[Syd3] Sydow, R. Positionsbestimmung eines Punktes im Orbit der Erde
Niederfinow (Deutschland) 06.06.2022
https://rolfswelt.de/physik/#rt-das-gravitationspotential

[U1] unbekannt: Gravitationspotential
Spektrum Akademischer Verlag   Heidelberg   (1998) cited 09.12.2017
http://www.spektrum.de/lexikon/physik/gravitationspotential/6096

[U2] unbekannt: Gravitations-Zeitdilatation
Spektrum.de (Lexikon der Physik)   unbekannt   (1998) cited 07.01.2017
http://www.spektrum.de/lexikon/physik/gravitations-zeitdilatation/6104

[Uhl] Uhlmann A. M. et al.:   Meyers Neues Lexikon, in acht Bänden   Epibiose - Handel   Bd. 3
VEB Bibliografisches Institut Leipzig   Leipzig   1. Aufl.   1962