



Kreiswelle

R. Sydow, Niederfinow
(2023)

abstrakt: Das hier durchgeführte Gedankenexperiment zielt auf die Frage ab, in welcher Weise sich die Frequenz des Lichts für einen bewegten Beobachter verändert, wenn lediglich klassische Formeln in einer euklidischen Geometrie Anwendung finden.

Dass die gefundenen Ergebnisse mit den Aussagen der speziellen Relativitätstheorie übereinstimmen, ist wohl kaum zu erwarten. Dass es aber Ähnlichkeiten in den Effekten gibt, sollte Anlass für tiefergreifende Überlegungen sein.



Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
Einleitung	3
Berechnung	3
Längenbestimmung	3
Aberrationswinkel	4
Auswertung	5
Literatur	6

Einleitung

Was eine Kreiswelle ist, sollte hinlänglich bekannt sein (vgl. [Had]). Man stelle sich eine Wasserwelle vor, die durch die Initiierung eines Steinwurfs in einen See hervorgerufen wurde. Diese sich kreisförmig als Oberflächenwelle ausbreitende Welle soll im Folgenden näher betrachtet werden.

Welcher Zweck wird damit verbunden, wenn es doch zur Kreiswelle nichts Neues zu untersuchen gibt?

Es soll die folgende Fragestellung untersucht werden: welchen Abstand L hat ein Beobachter nach einer Zeit t zum Rand der Kreiswelle, wenn sich die Kreiswelle mit der Geschwindigkeit c ausweitet und der Beobachter mit der Geschwindigkeit v vom Ursprung der Kreiswelle entfernt?

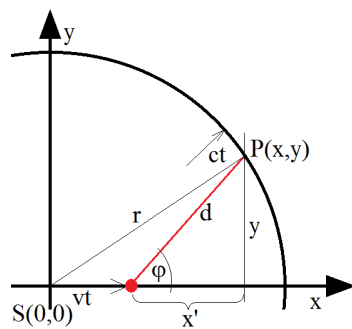


Bild 1: Skizze der Situation

Im Bild 1 ist diese Situation grafisch dargestellt. Die Kreiswelle wurde zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zentrum des Koordinatensystems x, y initiiert. Sie dehnt sich mit der Geschwindigkeit c kreisförmig um den Koordinatenursprung aus. Nach einer Zeit t hat sie den Radius r .

Ein Beobachter (roter Punkt) habe sich in der Zeit t vom Koordinatenursprung mit der Geschwindigkeit v in Richtung der x -Achse bewegt. Wenn er nun zum Zeitpunkt t im Winkel φ zur Kreiswelle schaut, welche Entfernung d wird er von seinem Standpunkt bis zur Kreiswelle messen?

Berechnung

Längenbestimmung

Der Ansatz für die Berechnung ist denkbar einfach. Dazu werden die beiden Dreiecke betrachtet, die sich über y ergeben. Das sind einerseits das Dreieck $\Delta(r, y, vt+x')$ und andererseits das $\Delta(d, y, x')$.

Da in beiden Dreiecken die Seite y enthalten ist und beide Dreiecke rechtwinklig sind, lässt sich die folgende Gleichung aufstellen:



$$y^2 = r^2 - (vt + x')^2 = d^2 - x'^2$$

Gl. 1

Unterstellt man nun, dass sich die zu messende Entfernung d eine Funktion des Winkels φ ist:

$$x' = d \cdot \cos(\varphi)$$

Gl. 2

und der Radius r sich aus der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c ergibt:

$$r = ct$$

Gl. 3

dann ergibt sich der auszuwertende Ansatz aus Gleichung Gl. 1 unter Substitution von x' zu:

$$(ct)^2 - (vt + d \cdot \cos(\varphi))^2 = d^2 - d^2 \cdot \cos^2(\varphi)$$

Gl. 4

Diese Gleichung Gl. 3 ist dann aufzulösen:

$$c^2t^2 - v^2t^2 - 2vtd \cdot \cos(\varphi) - d^2 \cdot \cos^2(\varphi) = d^2 - d^2 \cdot \cos^2(\varphi)$$

Gl. 5a

$$c^2t^2 - v^2t^2 - 2vtd \cdot \cos(\varphi) = d^2$$

Gl. 5b

$$d^2 + 2 \cdot vt \cdot d \cdot \cos(\varphi) - c^2t^2 + v^2t^2 = 0$$

Gl. 5c

$$d_{1,2} = -vt \cdot \cos(\varphi) \pm \sqrt{v^2t^2 \cdot \cos^2(\varphi) + c^2t^2 - v^2t^2}$$

Gl. 5d

$$d_{1,2} = -vt \cdot \cos(\varphi) \pm \sqrt{v^2t^2(\cos^2(\varphi) - 1) + c^2t^2}$$

Gl. 5e

$$d_{1,2} = -vt \cdot \cos(\varphi) \pm \sqrt{c^2t^2 - v^2t^2(1 - \cos^2(\varphi))}$$

Gl. 5f

$$d_{1,2} = -vt \cdot \cos(\varphi) \pm \sqrt{c^2t^2 - v^2t^2 \sin^2(\varphi)}$$

Gl. 5g

Diese Gleichung Gl. 5g lässt sich nun relativieren. Setzt man das so erhaltene d ins Verhältnis zum Radius r , ergibt sich ein zeitunabhängiger Zusammenhang. Entsprechend Gleichung Gl. 3 ist die Gleichung Gl. 5g durch ct zu dividieren:

$$\frac{d_{1,2}}{ct} = -\frac{v}{c} \cdot \cos(\varphi) \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2(\varphi)}$$

Gl. 6

Aberrationswinkel

Interessant ist es nun, den Winkel φ zu bestimmen, bei welchem die vom Beobachter gemessene Entfernung d gerade dem Radius r entspricht.

Dieser Winkel ist einfach zu ermitteln, wenn in der Gleichung Gl. 6 das Verhältnis $d/ct = 1$ gesetzt wird. Da $r = ct$ gilt, bedeutet das besagte Verhältnis gerade die Gleichheit von r und d :

$$1 = -\frac{v}{c} \cdot \cos(\varphi) \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2(\varphi)}$$

Gl. 7

$$\left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos(\varphi)\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2(\varphi)$$

Gl. 7a

$$1 + 2\frac{v}{c} \cdot \cos(\varphi) + \frac{v^2}{c^2} \cdot \cos^2(\varphi) = 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2(\varphi)$$

Gl. 7b

$$1 + 2\frac{v}{c} \cdot \cos(\varphi) + \frac{v^2}{c^2} \cdot (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = 1$$

Gl. 7c

$$2\frac{v}{c} \cdot \cos(\varphi) + \frac{v^2}{c^2} \cdot (1) = 0$$

Gl. 7d

$$2\frac{v}{c} \cdot \cos(\varphi) = -\frac{v^2}{c^2}$$

Gl. 7e

Quellenangabe: Sydow, R. Kreiswelle, Niederfinow (Deutschland) 14.04.2023
<https://rolfswelt.de/mathematik/#geometrie-kreiswelle>

Revision: 1.1.0.2 vom 15.07.2023

copyright ©: alle Rechte vorbehalten, 2023, Rolf Sydow

$$\cos(\varphi) = -\frac{v}{2c}$$

Gl. 7f

Dass der Kosinus des Winkels negativ ist, deutet darauf hin, dass der Winkel φ selbst größer als 90° ist.

Auswertung

Dem aufmerksamen Leser ist schon aufgefallen, dass es sich bei dem hier untersuchten Sachverhalt um ein Problem der Relativitätstheorie handelt.

Es beschreibt, wie ein bewegter Beobachter die Wellenlänge eines Lichtquants registriert, wenn es sich in einem Winkel φ von ihm wegbewegt. Dabei wurde das Lichtquant zum Zeitpunkt $t = 0$ im Koordinatenursprung emittiert und kann nun je nach Ausbreitungsrichtung nur Orte auf der oben beschriebenen Kugelwelle einnehmen. Der Beobachter wird dann die Wellenlänge in dem Maße verschoben wahrnehmen, wie das Verhältnis aus der Entfernung zum Beobachter zu dem vom Lichtquant zurückgelegten Weg ausfällt (siehe Gl. 6).

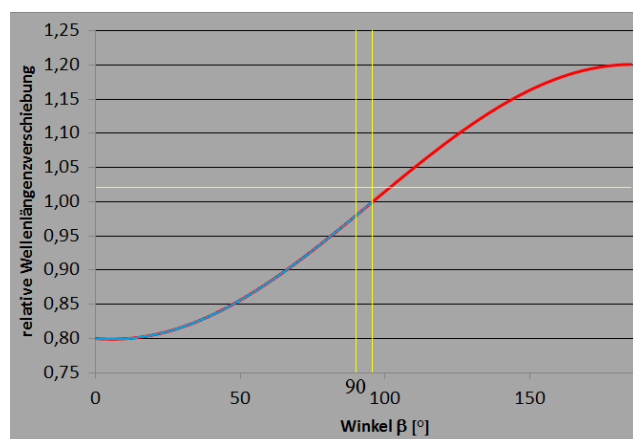


Bild 2: Wellenlänge als Funktion des Betrachtungswinkels für eine Geschwindigkeit $v/c = 0,2$

Das Bild 2 zeigt eine Wellenlängenveränderung für die Winkel bis 180° , die der Beobachter wahrnimmt, wenn er sich mit einer Geschwindigkeit von $0,2c$ bewegt.

Es ist zu sehen, dass er im unteren Winkelbereich eine Blauverschiebung des Lichts erkennen wird. Diese Blauverschiebung wird erst bei einem Winkel über 90° in eine Rotverschiebung wechseln. Der konkrete Winkel, bei dem das passiert, ist mithilfe der Formel Gl. 7f ermittelbar.

Welche Erkenntnis ist dieser Rechnung zu entnehmen?

Die Antwort ist, dass es unabhängig von der relativistischen Frequenzverschiebung auch eine klassische Erklärung für dieses Phänomen gibt.

Ob die Relativitätstheorie erforderlich ist, um die Frequenzverschiebung bei Relativbewegungen zu erklären, bleibt weiteren Versuchen vorbehalten.



Literatur

- [Had] Hadley, P.: Kreiswellen
Technische Universität Graz Graz (Österreich) cited 14.04.2023
<http://lampx.tugraz.at/~hadley/physikm/script/waves/circular2d.de.php>