



Positionsbestimmung eines Punktes im Orbit der Erde

R. Sydow, Niederfinow (Deutschland)
(2022)

abstrakt: es ist eigentlich eine einfache Frage. Es soll ein bekannter Punkt im Orbit der Erde in das Koordinatensystem der Sonne übertragen werden. Vielleicht ist diese Fragestellung eher eine Übungsaufgabe für angehende Astronomen. Doch gewinnt sie an Bedeutung, wenn es um die Auswertung des Maryland-Experiments geht. In diesem Experiment (s. [All]), wo eine im Flugzeug befindliche Atomuhr über 15 Stunden über annähernd einer Stelle der Erde kreiste, sollte mittels dieser Atomuhr die Zeitdilatation nachgewiesen werden.

Der Einfluss des Gravitationsfeldes der Sonne wurde dabei vernachlässigt. Dass das zu Fehleinschätzungen führte, wurde in [Syd] gezeigt.

Die zeitabhängige Transformation der Koordinaten der Atomuhr vom System der Erde zum Koordinatensystem ist dazu erforderlich.



Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
Abkürzungen	2
Einleitung	3
Spezifizierung des Koordinatensystems	3
Darstellung der Flugbahn	4
Literatur	7

Abkürzungen

NBR nördliche Breite

Einleitung

Die folgende Berechnung dient der Darstellung von Positionen im Umfeld der Erde, um damit auf weitere Eigenschaften wie beispielsweise die Gravitation an diesem Ort schließen zu können. Dazu wird ein Koordinatensystem gewählt, dessen Koordinatenursprung im Sonnenmittelpunkt ist. Insofern erklärt sich der Umstand des Unterfangens. Es geht hier nicht um die Relationen zum Erdmittelpunkt. Das bedeutete eine wesentliche Vereinfachung. In dieser Rechnung soll es gerade um die Relation zum Sonnenmittelpunkt gehen, um entsprechende Rückschlüsse auf den gravitativen Einfluss beider Himmelskörper –Sonne und Erde- auf den gewünschten Punkt erkennen zu können.

Einfluss auf die Berechnung einer bestimmten Position soll auch die Neigung der Erde und die geografische Breite haben, über der sich der betrachtete Punkt befindet. Ziel ist es, eine Bewegung der Punktposition zu beschreiben, die der Punkt bei der Drehung der Erde vollführt. Im konkreten Fall wird eine solche Rechnung benötigt, um beispielsweise die auf ein Flugzeug wirkende Gravitation zu ermitteln, wie es im Maryland-Experiment verwendet wurde.

Spezifizierung des Koordinatensystems

Es wäre denkbar, ein Koordinatensystem derart zu wählen, dass es die Ekliptik als x-z-Ebene hat und die y-Achse Ordinate darauf als Senkrechte steht. Dann wäre das Koordinatensystem sicherlich sehr einfach gewählt, die Darstellung der gewünschten Prozesse allerdings wäre eher kompliziert.

Deshalb wird das Koordinatensystem so gewählt, dass die x-Achse der Verbindungslinie der Mittelpunkte Sonne-Erde entspricht, wobei der Koordinatenursprung im Sonnenmittelpunkt liegen soll.

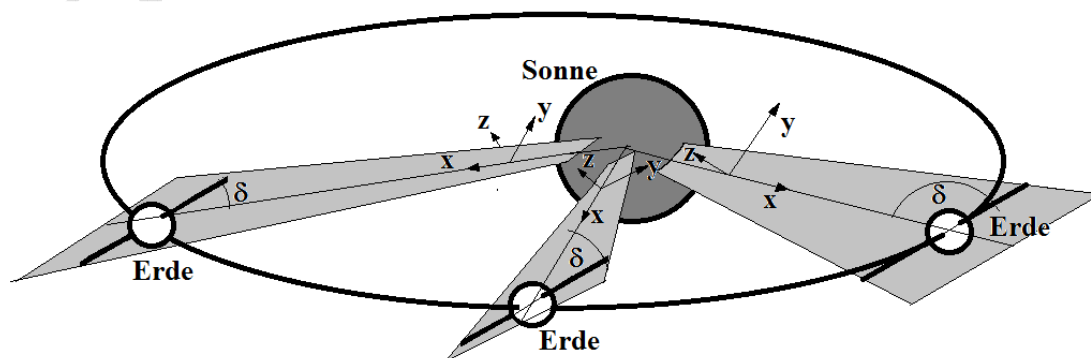


Bild 1: Definition des zu wählenden Koordinatensystems

Es wird eine Ebene bestimmt, die durch die beiden Vektoren x-Achse und Drehachse¹ der Erde aufgespannt wird. Damit lässt sich die y-Achse als Ordinate in dieser Ebene liegend definieren und die z-Achse stehe senkrecht auf dieser Ebene.

Im Bild 1 ist diese Situation für drei unterschiedliche Zeitpunkte dargestellt. Es ist erkennbar, dass die Drehachse der Erde in dieser Ebene liegt, aber einen veränderlichen Winkel δ zur x-Achse bildet.

Wenn sich das Koordinatensystem $K(x, y, z)$ mit der Zeit des Umlaues der Erde um die Sonne selbst auch verändert, also mitrotiert, so gibt es relativ zur Erde eine zeitunabhängige Orientierung.

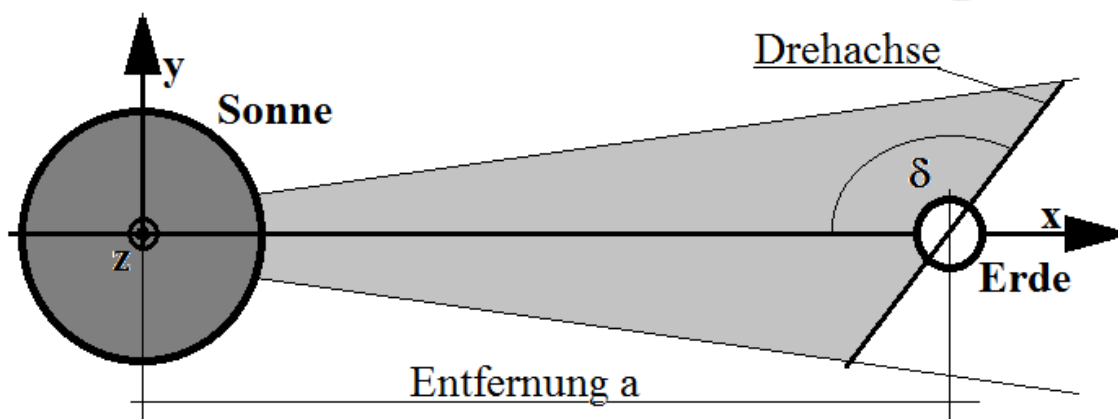


Bild 2: Koordinaten zu einem bestimmten Zeitpunkt

Diese Orientierung ist dem Bild 2 zu entnehmen. Es ist in dem Bild dargestellt, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt der Sonnenumrundung, also zu einem bestimmten Datum, die Erde einen bekannten Abstand a zur Sonne hat und der Neigungswinkel δ der Drehachse der Erde aus diesem Datum bestimmbar ist.

Darstellung der Flugbahn

Mit diesen Informationen soll die Flugbahn eines Punktes berechnet werden, der sich an einer geostationären Position der nördlichen Breite (NBR) befindet und sich mit der Erddrehung durch den Raum bewegt. Diese Situation wird im Bild 3 dargestellt. Der Punkt $P(x, y, z)$ bewegt sich von 0:00 Uhr bis 12:00 und weiter bis 24:00 auf der im Bild nur als Projektion erkennbaren Flugbahn.

¹ Die Drehachse oder Rotationsachse ist die Verbindungslinie der beiden Pole (Nord- und Südpol)

Quellenangabe: Sydow, R. Positionsbestimmung eines Punktes im Orbit der Erde Niederfinow (Deutschland) 06.06.2022
<https://rolfswelt.de/physik/#rt-das-gravitationspotential>

Revision: 1.1.0.3 vom 14.07.2023

copyright ©: alle Rechte vorbehalten, 2022, Rolf Sydow

Die Position des Punktes P zu einer beliebigen Zeit zwischen 0:00 und 24:00 Uhr lässt sich in einfacher Weise durch die Vektorgleichung Gl. 1 ausdrücken:

$$\vec{P} = \vec{a} + \vec{R}_m + \vec{K} \quad \text{Gl. 1}$$

In dieser Gleichung Gl. 1 wird ein Ortsvektor beschrieben, der auf den Punkt P zeigt. Er setzt sich zusammen aus den drei in der Gleichung beschriebenen Vektoren. Der Vektor $\vec{a}$ symbolisiert den Abstand a von der Sonne bis zur Erde. Der Vektor $\vec{R}_m$ ist ein Verschiebungsvektor, der vom Mittelpunkt der Erde zum Mittelpunkt der Flugbahnebene des betrachteten Punktes P zeigt. Letztlich bleibt der Vektor $\vec{K}$, der die Projektion des Radius 'R_k' der kreisförmigen Flugbahn des Punktes P selbst beschreibt. Er ist abhängig von der Uhrzeit und wird als Funktion des Rotationswinkels φ um die Erdachse ausgedrückt.

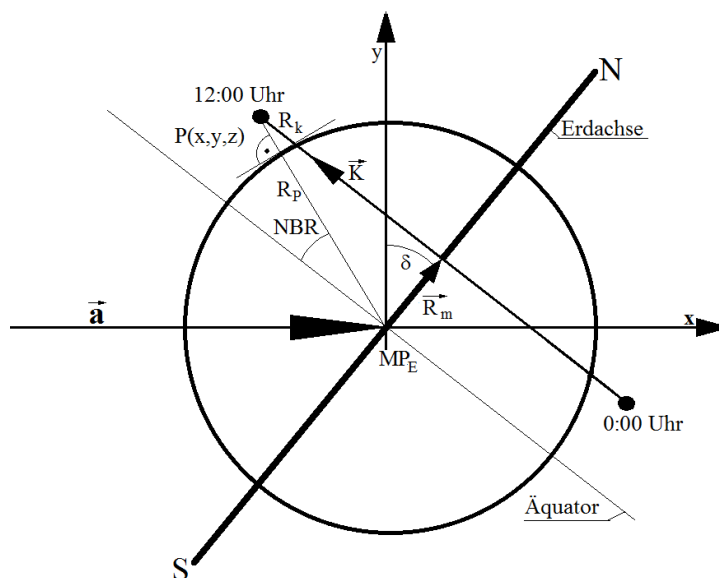


Bild 3: Bewegungsbahn eines Punktes auf der Erde

Dieser berechnet sich zu:

$$\vec{K} = R_k(\vec{e}_1 \cos(\varphi) + \vec{e}_2 \sin(\varphi)) \quad (\text{vgl. [Oba] Gl. 1}) \quad \text{Gl. 2}$$

Zur Erklärung und weiteren Berechnung werden die folgenden Betrachtungen ausgeführt:

- Der Vektor $\vec{P}$ ist durch seine Komponenten x, y und z bestimmt
- Der Vektor $\vec{a}$ ist durch seinen Abstandsbetrag a und den Einheitsvektor in Richtung der x-Achse bestimmt
- Der Mittelpunkts-Verschiebungsvektor $\vec{R}_m$ ist durch seinen Betrag R_m und seinen Einheitsvektor bestimmt. Der Einheitsvektor hat die vom Winkel δ abhängigen Komponenten sin(δ) für die x-Richtung und cos(δ) für die y-Richtung. Der Betrag R_m berechnet sich aus dem Mittelpunktabstand R_p mal dem sin(NBR)



- Zur Berechnung des Vektors $\vec{K}$ ist der Betrag von R_k zu berechnen. Dieser Radius des Flugbahnkreises ergibt sich aus dem Mittelpunktabstand R_p mal dem $\cos(\text{NBR})$.
Der Einheitsvektor $\vec{e}_1$ zeige vom Mittelpunkt des Flugbahnkreises zur 12:00 Uhr Position der Flugbahn. Er hat damit eine x-Komponente von $\cos(\delta)$ und eine y-Komponente von $\sin(\delta)$.
Der Einheitsvektor $\vec{e}_2$ stehe orthogonal auf dem Vektor $\vec{e}_1$ und hat damit lediglich eine z-Komponente, die den Wert eins haben muss.

Setzt man diese Informationen zu einer Gleichung zusammen, folgt die Gleichung Gl. 3:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_p \sin(\text{NBR}) \begin{pmatrix} \sin(\delta) \\ \cos(\delta) \\ 0 \end{pmatrix} + R_p \cos(\text{NBR}) \left[\cos(\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\delta) \\ -\sin(\delta) \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{Gl. 3}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun das Gleichungssystem zur Berechnung der einzelnen Komponenten des Punktes P ableiten:

$$x = a + R_p [\sin(\text{NBR}) \sin(\delta) + \cos(\text{NBR}) \cos(\delta) \cos(\varphi)] \quad \text{Gl. 4a}$$

$$y = R_p [\sin(\text{NBR}) \cos(\delta) - \cos(\text{NBR}) \cos(\delta) \sin(\varphi)] \quad \text{Gl. 4b}$$

$$z = R_p \cos(\text{NBR}) \sin(\varphi) \quad \text{Gl. 4c}$$

Damit ist die Zerlegung eines Vektors $\vec{P}$ in seine Komponenten als Funktion der Zeit bei der Rotation des Punktes um die Erde möglich. Es ist lediglich davon auszugehen, dass die Zeit in der Variablen φ steckt:

$$\varphi [^\circ] = \frac{360}{24} \cdot t [\text{h}] \quad \text{Gl. 5}$$



Literatur

- [All] Alley, C. O.: Relativity and Clocks
33rd Annual Symposium on Frequency Control Atlantic City (NJ, USA) (30.05.-01.06.1979) load
18.03.2014
<http://ieeexplore.ieee.org/document/1537236/?arnumber=1537236>
- [Oba] Obach, C.: Die Parameterdarstellung des Kreises im Raum
König-Heinrich-Schule Fritzlar (08/2010) cited 25.02.2018
http://khs.mlits.df-kunde.de/docs/pdf/CT/Kreis_im_Raum_Obach.pdf
- [Syd] Sydow, R.: Das Gravitationspotential, Maryland lässt grüßen
www Niederfinow 04.06.2022
<https://rolfswelt.de/physik/#rt-das-gravitationspotential>