Die relativistische Beschleunigung

translatorisch

R. Sydow, Niederfinow (Deutschland)
(2023)

abstrakt: Der Stand der Wissenschaft ist, dass zwar eine Längenkontraktion aus einer Relativgeschwindigkeit abzuleiten sein soll, eine Beschleunigung hingegen keinen Einfluss auf solche Kontraktionen haben soll. Wenn auch die Beschleunigung selbst den Rahmen der speziellen Relativitätstheorie sprengt, wird versucht, sie mit den Mitteln der Lorentz-Transformation zu begründen.
Hier wird herausgearbeitet, dass es verschiedene Ansätze für die Darstellung von Beschleunigungen in anderen Inertialsystemen gibt und dass sich die Wissenschaft nicht einig ist, welcher Ansatz eindeutig als der richtige zu verwenden ist.
Es wird anheimgestellt, über die Rolle der Beschleunigung im Rahmen der spezellen Relativitätstheorie nachzudenken.

Quellenangabe: Sydow, R. Die relativistische Beschleunigung, translatorisch Niederfinow (Deutschland) 06.01.2023
https://rolfswelt.de/physik/#lt-die-relativistische-beschleunigung
Revision: 1.3.2.3 vom 23.07.2023

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen

ART	allgemeine Relativitätstheorie
IS	Inertialsystem
RP	Relativitätsprinzip
SRT	spezielle Relativitätstheorie

Einleitung

Wenn hier von der relativistischen Beschleunigung die Rede sein soll, ist zu begründen, warum gerade dieses Thema von besonderer Bedeutung ist.
Abgesehen davon, dass jedes physikalische Thema bedeutsam ist, birgt die relativistische Beschleunigung Widersprüche in sich. Einerseits stellt sich Frage, ob im Rahmen der SRT Beschleunigungen überhaupt fassbar sind und andererseits ist zu beantworten, ob jedwede Beschleunigung einen Einfluss auf die Zeitdilatation haben kann.

In seiner Arbeit von 1905 betonte Einstein, dass sich Inertialsysteme „in gleichmäßiger Translationsbewegung“ ([Ein2] S. 895) befinden, also keiner Drehung und keiner Beschleunigung unterliegen. Wenn aber Einstein davon sprach, dass „die physikalischen Gesetze […] in allen Inertialsystemen dieselbe Form“ ([Emb] UP 2 ‚Postulate‘) haben, schließt er die Bewegungsgesetze incl. der Beschleunigung ein.
Hier offenbart sich ein Stolperstein für die Physiker. Natürlich ist es Voraussetzung der SRT, sämtliche Betrachtungen in oder aus einem IS vorzunehmen. „Alle Betrachtungen beziehen sich [in der SRT] auf Inertialsysteme. Beschleunigte Bezugssysteme werden nicht betrachtet“ ([Hoc] S. 445).
Jedes Objekt muss einem IS zuzuordnen sein, um es mit den Mitteln der SRT bewerten zu können. Doch bedeutet das nicht im Umkehrschluss auch, dass jedem Objekt ein IS zugeordnet werden kann?
Wenn sich also ein beschleunigtes Objekt in einem IS bewegen sollte, wäre diesem Objekt selbst kein IS zuordenbar. Jedes System, das dem Objekt zugeordnet würde, ist wegen der Beschleunigung des Objektes kein IS mehr.

Man könnte sagen, dass das RP allemal gelten würde, auch wenn ein Objekt gegenüber einem Beobachter geradlinig beschleunigt sei. Schließlich würde die Bewegung relativ sein und von beiden Beteiligten in gleicher Weise wahrgenommen. Dass aber das beschleunigte Objekt wegen der aus seiner Trägheit (siehe [Syd3]) resultierenden Kraftwirkung sehr wohl zu unterscheiden in der Lage ist, wer der Beschleunigte ist, sollte einleuchten. Auf einen Beobachter im IS dürfte aber per Definition keine Kraft wirken.
Die Lorentz-Transformation als Grundlage der SRT ist nicht auf Beschleunigungen anwendbar. Grund dafür ist die Linearitätsbedingung. Einstein sagte salopp: „Zunächst ist klar, daß [sic] die Gleichungen [die Transformationsgleichungen] linear sein müssen“ ([Ein2] S. 898). Die Linearität der Gleichungen bezieht sich auf die Transformation der physikalischen Gesetze in ein anderes System. Bei physikalischen Formeln höheren als des ersten Grades ist die Transformation nicht mehr möglich.

Um Beschleunigungen relativistisch zu erfassen, steht die ART zur Verfügung. Sie beschreibt auch den Einfluss der Beschleunigung auf die Zeitdilatation.

Mit dem Äquivalenzprinzip, welches Einstein zur Begründung seiner ART aufstellte, ist eindeutig gesagt, „daß [sic] schwere Masse (die also in einem Schwerefeld eine Gewichtskraft auf die Unterlage ausübt) und träge Masse (zu deren Beschleunigung eine Kraft erforderlich ist) äquivalent sind“ ([Bey] S. 191). „Das entspricht der Vorstellung, dass man in einem solchen geschlossenen Laborsystem lokal nicht entscheiden kann, ob man in einem beschleunigten System ist, oder sich in einem Gravitationsfeld befindet“ ([Kley] S. 130). Damit ist eindeutig der Schluss zu ziehen: „Alle Naturgesetze sind identisch in einem inertialen Bezugssystem in einem homogenen Gravitationsfeld mit der gravitativen Beschleunigung $\boldsymbol{g}$, und in einem Bezugssystem, das in einem Raumbereich ohne merkliche Gravitation mechanisch mit $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{g}$ beschleunigt wird.“ ([Grü] S. 11)

Hier ist nun der zweite Stolperstein für die Physik. Wenn eine Gravitation eine Zeitdilatation hervorruft, dann sollte das von der Beschleunigung ebenfalls anzunehmen sein. Die Aussage, „dass die Zeitdilatation von Elementarteilchen tatsächlich nur von der Geschwindigkeit, nicht aber von der Beschleunigung durch das Magnetfeld abhängt“ ([Schu1]), korrespondiert nicht mit der Aussage des Äquivalenzprinzips.
Auch hilft es nicht, wenn man die Ursachen der Gravitation und der Beschleunigung für eine solche Unterscheidung heranzieht. Zu sagen, es „[…] verursacht die Beschleunigung a = v/t keine weiteren relativistischen Wirkungen auf die Zeit, die mit der Gravitation vergleichbar wären. Dies ergibt sich schon daraus, dass die Faktoren der Zeitdilatation und der Lorentzkontraktion bei der Gravitation gar nicht von der Beschleunigung, sondern ausschließlich vom Energiepotential abhängen“ ([D.H]), ist nicht beweiswirksam, solange das Äquivalenzprinzip nicht falsifiziert wird.

Die Äquivalenz von Beschleunigung und Gravitation birgt nur einen kleinen Unterschied. Während man nachweisen konnte, dass mit sich änderndem Gravitationspotential sich auch der Lauf der Zeit veränderte, indem man einfach Uhren auf einen Berg ([Stef] S. 25) trug oder einen erhöhten Punkt wie beispielsweise den Kölner Dom ([Gre]) verfrachtete, waren die Untersuchungen hinsichtlich der Beschleunigung immer mit Veränderungen der Geschwindigkeit verbunden.

Bei der Auswertung dieser Versuche unterschiedlichen Gravitationspotentials gibt es nur einen Einflussfaktor. Das ist das Gravitationspotential, das von der Gravitation einer großen Masse herrührt und über eine zu messende Zeitspanne auf die Uhr einwirkt. Aber bei den Versuchen mit Beschleunigungen ergaben sich immer Zeitdilatationen, deren Werte durch die Formeln der SRT begründet werden konnten. Es waren auch keine Dilatationen, die durch Überlagerung aus beiden Ursachen zu erklären waren und auch nicht von der Größe, dass die Formeln der allgemeinen Relativitätstheorie darauf anwendbar waren.
So bleibt nur messerscharf zu schlussfolgern, dass die nachgewiesenen Zeitdilatationen der Geschwindigkeit zuzuschreiben sind. Diese Erkenntnis führt aber zu der Frage, ob das Äquivalenzprinzip noch Bestand hat.

Somit stellt sich die Frage, ob man eventuell doch zwischen einer Zeitdilatation aus Gravitation und der durch eine Beschleunigung verursachten unterscheiden muss.

Beschleunigungen in der SRT

Angenommen, es sei möglich, Beschleunigungen auch in der SRT zu beschreiben, führt das zu Überlegungen, die denen der SRT identisch sind (vgl. [Schu3]). Man erfasse aus einem IS die Bewegung eines beschleunigten Objektes und überlege, wie ein Beobachter eines anderen IS diese Bewegung wahrnehmen würde. Diese Formulierung weist auf einen anderen Sachverhalt hin, als es bedeutete, die Beschleunigung selbst in unterschiedlichen IS zu vergleichen.

Ein erster Versuch erscheint sehr eigenwillig. Dazu nehme man die Formel für die Geschwindigkeitsaddition und die der Zeittransformation. Damit hat man in der ersten Formel die Relation der Geschwindigkeit beider Inertialsysteme und in der zweiten die der Zeit. Bildet man nun die Differentiale für die Geschwindigkeit und die Zeit aus den entsprechenden Formeln und dividiert sie, ergibt sich ein Quotient aus Geschwindigkeit durch Zeit im differentiell Kleinen. Damit hätte man auf einfachem Wege die Beschleunigung als Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. (vgl. [Mar] S. 153 f.) Es ergibt sich sogar ein sehr einfacher Zusammenhang:

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{\beta^3}{\left(1+\frac{Vv\prime}{c^2}\right)^3} a \quad \text{(vgl. [Mar] S. 154)} \qquad \text{Gl. 1}$$

Dieses Ergebnis ist in der Anl. 1 kommentiert. Leider kann dem dort angegeben Rechenweg nicht gefolgt werden kann. Damit wird empfohlen, dieser Formel (Gl. 1) nicht zu anzuwenden.

Bei der Transformation von Kräften in ein anderes Inertialsystem ist nachvollziehbar gezeigt, dass die zur Relativbewegung parallele Beschleunigung eher mit:

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{a}{\beta^3} \quad \text{(vgl. [Back] S. 101 Gl. 95)} \qquad \text{Gl. 2}$$

anzunehmen ist. Dabei wurden zwei Gedanken in Ansatz gebracht. Zum einen ging der Verfasser der Formel davon aus, dass Kräfte invariant sind und zum anderen ging er von der relativistischen Masseänderung aus. Somit wurde hier die relativistische Beschleunigung als Quotient aus Kraft und Masse ermittelt.
Die Verwendung dieser Formel setzt also den Nachweis der Invarianz von Kräften und die Existenz einer relativistischen Masse voraus.

Die so simpel anmutende Formel (Gl. 2) wird in ihrer Einfachheit noch übertroffen. In Anl. 2 ist eine Variante entwickelt worden, die Transformation der Beschleunigung herzuleiten. Danach ergäbe sich die transformierte Beschleunigung a_{eff} zu:

$$a_{\mathrm{eff}} = \frac{a}{\gamma^2} \qquad \text{Gl. A2.4}$$

Ob die Umrechnung der Beschleunigung mittels Formel Gl. A2.4 uneingeschränkt möglich ist, ist zu bezweifeln. In Anl. 2 ist aufgezeigt, dass dazu eine Bedingung zu erfüllen ist, die nicht zwangsläufig erfüllt sein muss.

Ein weiterer Ansatz ist die Überlegung, dass die Geschwindigkeit eines Raumschiffs durch eine konstante Beschleunigung erhöht wird. Es wird wegen der Gleichmäßigkeit der Beschleunigung in jedem Zeitintervall ΔT die Geschwindigkeit um denselben Wert erhöht. Nimmt man die Gleichung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition, fügt noch einige Vereinfachungen ein und berechnet daraus den relativistischen Verkürzungsfaktor, kommt man letztendlich zu der Beschleunigungsrelation (vgl. [Urb] S. 1 ff.):

$$a_E(t) = \frac{a}{\left[\left(\frac{at}{c}\right)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}}}$$ ([Bis] Bewegungsgl. (2) S. 2 Gl. 7; [Urb] S. 5 Gl. 4)) Gl. 3

Diese Formel sieht der vorigen (Gl. 2) ähnlich. Interessant ist der Einfluss der Zeit auf der rechten Seite der Gleichung Gl. 3. Damit wird im Prozess der Beschleunigung das a_E asymptotisch gegen null gehen, wenn die Zeit t gegen unendlich geht.
Leider birgt die Herleitung auch dieser Gleichung einige Fragen und Fehler in sich, die Zweifel an der uneingeschränkten Anwendbarkeit der Gleichung aufkommen lassen (vgl. Anl. 3 und Anl. 4).

Ein völlig anderer Ansatz ist der folgende: „Beschleunigungen eines Körpers in Richtung der x-Achse sind in beschleunigten Systemen gleich, weil mit v = konstant

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d(u'_x + v)}{dt} = \frac{du'_x}{dt}$$ “ ([Kuc] S. 597, siehe [Back] S. 13) Gl. 3

Das soll heißen, wenn die Beschleunigung im ruhenden System a_x ist, dann ist sie definiert als die Änderung einer Geschwindigkeit u_x nach der Zeit. Diese Änderung wird aber von einem Inertialsystem, dass sich relativ mit v zu diesem System bewegt, als u'_x wahrgenommen. Die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten muss durch:

$$u_x + v = u'_x$$ Gl. 4

gegeben sein. Die pure Linearität dieser Beziehung begründet sich mit der Aussage, dass die Relativgeschwindigkeit v in jedem IS gleich wahrgenommen wird. Weil also v als Konstante aufzufassen ist, wird sie in der Ableitung zu null, sie verschwindet. Das, was dann übrig bleibt, ist die zeitliche Ableitung von u'_x. Die entspricht somit der Beschleunigung, wie sie vom bewegten Inertialsystem gesehen wird.

Wesentlich bei der Betrachtung der Beschleunigung ist, dass die Formeln nur unter Einbeziehung des Verhaltens der Zeit zu verstehen sind. Das bedeutet, dass ein richtigerer Ansatz die Berechnung der Viererbeschleunigung sein könnte, bei dem von der zeitlichen Änderung der Geschwindigkeit im beschleunigten System (vgl. [Bart] S. 342) ausgegangen wird.

Grundsätzlich wird zur Berechnung der Beschleunigung die Geschwindigkeit nach der Zeit abgeleitet. Das muss auch hier so sein. Nur muss beachtet werden, dass in einer 4-dimensionalen Welt jede Berechnung 4-dimensional durchzuführen ist. Die Zeit als die mit der Lichtgeschwindigkeit normierte 4. Dimension muss gleich in den Ansatz mit eingehen.
Bei einer solchen Rechnung ergibt sich die Formel Gl. 5 (siehe Anl. 7):

$$b^{\mu} = \gamma^4 \frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{c^2}\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4 \frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{c} \\ \gamma^2 \dot{\mathbf{v}} + \gamma^4 \frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{c^2}\mathbf{v} \end{pmatrix} \quad \text{([Bob] S. 30)} \qquad \text{Gl. 5}$$

In der Gleichung steht die Beschleunigung b^{μ}, die im Ansatz die Beschleunigung im System eines bewegten Objektes war und die nach der Transformation zur Beschleunigung im System eines ruhenden Beobachters geworden ist (vgl. Anl. 7).
Dass sich diese Beschleunigung in einer Summe darstellt und dass das $\gamma = 1/\beta$ in den Potenzen 2 und 4 ergibt, ist dem Differentiationsverfahren geschuldet (siehe [Bob] S. 30).

Leider ist dieses Ergebnis nur zu erreichen, wenn eine Beziehung:

$$u_{ruh} = u \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma u \quad \text{(vgl. Anl. 7)} \qquad \text{Gl. 6}$$

angenommen wird. Diese Beziehung nach Gleichung Gl. 6 entbehrt aber jeglichen Bezug zur SRT, wenn es sich bei u um eine Relativgeschwindigkeit handelt. Insofern ist die gefundene Aussage der Gleichung Gl. 5 ohne Bedeutung.

Einen Gedanken provoziert die Gleichung Gl. 5 allerdings. Da, wo die Lichtgeschwindigkeit als konstant angenommen wird, ist keine Zeitdilatation aus der Beschleunigung abzuleiten. Erst, wenn die Lichtgeschwindigkeit als variabel deklariert wird, kann eine Zeitdilatation aus der Beschleunigung abgeleitet werden. Damit wäre die Grenze zwischen der SRT und der ART gezogen. Dass in der SRT die Lichtgeschwindigkeit als konstant anzunehmen ist, steht außer Frage. In der SRT waren auch die Beschleunigungen ausgeschlossen worden. Aber gerade im Bereich der ART, wo Gravitation ihren Eingang findet, geht man nicht mehr von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit aus (vgl. [Ein1] S. 906). Damit ist es kein großer Schritt, wenn man über das Äquivalenzprinzip dazu kommt, dass eine Beschleunigung als Äquivalent zur Gravitation ebenfalls zu einem veränderten Betrag der Lichtgeschwindigkeit führt. Jedenfalls ist der Gedanke nicht absurd, wenn man sich klar macht, dass die Annahme einer konstanten Lichtgeschwindigkeit für beschleunigte Prozesse eben nur eine Annahme ist.

Dennoch gibt es Gedanken, die auf eine Zeitänderung (sprich: Zeitdilatation) bei Beschleunigungen in der SRT hinweisen. „Die Eigenzeit wird erhalten, wenn über das Eigenzeitelement integriert wird“ ([D.H])
Unterstellt man, dass in differentiell kleinen Zeitintervallen die SRT gelten muss, kann man von der Formel der Zeitdilatation (Gl. 7) ausgehen und sie für die Anwendung auf eine

beschleunigte Bewegung modifizieren. Das bedeutet, dass der Relativitätskoeffizient eine zeitabhängige Geschwindigkeit erhält. Diese wird aufgespalten in einen konstanten Anteil ‚$v_0\gamma$‘ und einen veränderlichen Anteil ‚a·t‘.

$t = \gamma\tau$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ Gl. 7

Diese Aufteilung ist dann mittels der Formel der relativistischen Geschwindigkeitsaddition vorzunehmen, indem die Geschwindigkeiten in dieser Formel durch die entsprechenden Ausdrücke ersetzt werden (vgl. Anl. 8).
Hat man so einen funktionellen Zusammenhang der Eigenzeit des bewegten Inertialsystems mit der Zeit konstruiert, kann dieser durch Integration über die Zeit verarbeitet werden.
Dann ergibt sich eine Zeitspanne in Eigenzeit als Funktion der Beschleunigung, wenn diese konstant ist:

$\tau = \frac{c}{a}\ln\left(\frac{\sqrt{c^2+(at+v_0\gamma_0)^2}+at+v_0\gamma_0}{(c+v_0)\gamma_0}\right)$ ([D.H]) Gl. A8.3

Diese sehr eigenwillig aussehende Gleichung hat aber einen Makel. Bei der Annahme, dass die Beschleunigung a nicht vorhanden ist, sollte sich wieder die Formel der Zeitdilatation der SRT ergeben.
Das ist aber nicht der Fall. Ganz im Gegenteil geht die Zeitspanne τ wegen der Beschleunigung a im Nenner und eines real anzunehmenden Zählers in der Logarithmusfunktion immer gegen unendlich. Damit ist die Sinnfälligkeit dieser Formel zumindest für diesen Fall nicht gegeben.

Das ist aber noch nicht das Ender der Variation von Lösungsansätzen. In [Her] wird von der Impulserhaltung ausgegangen (Anl. 5). Ohne eine Herleitung der sich aus diesem Ansatz des Impulses ergebenden Formel aufzuzeigen, kommt der Verfasser zu einer sehr kurzen und schön aussehenden Formel:

$a = \gamma^3 a_x$ Gl. 8

Der Darin enthaltene Relativitätskoeffizient entspricht dem in Gleichung Gl. 7 dargestellten.
Wegen des Zusammenhangs der Kraft F = ma ergibt sich dann die Formel für die Beschleunigung sehr ähnlich aber doch nicht identisch mit der Gleichung Gl. A2.4.

Die Aufzählung von Varianten, die Beschleunigungstransformation durchzuführen, ist sicherlich noch erweiterbar. Doch welchen Zweck hätte es, dies zu tun?
Ein Fazit kann schon jetzt gezogen werden. So viele Herleitungen es für die Transformationsformel der Beschleunigung auch gibt, es sind viele dabei, die zweifelhaft, unglaubwürdig oder auch nur falsch sind.
Doch es sollte doch die eine Transformation geben, die zwingend als richtig einzuschätzen ist. Und wenn es sie gibt, dann wäre damit bewiesen, dass die Beschleunigung auch in der SRT zu einer Zeitdilatation führt.

So sei im Folgenden die Rechnung Einsteins untersucht, in der auch schon in seiner Arbeit [Ein2] im Jahr 1905 zu einer Transformation der Beschleunigung kam (siehe Anl. 6).

Sein Ausgangspunkt war das Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Mit diesem Start seiner Berechnungen dokumentiert Einstein, dass es eine Geschwindigkeitsänderung im IS des Beschleunigten und eine Relativgeschwindigkeit geben muss. Zusätzlich beachtet Einstein, dass bei der Transformation der Geschwindigkeiten die Substitution der Zeitskalen erforderlich ist. Damit wäre dann die Beschleunigung nur als zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit zu betrachten.
Im Ergebnis der Rechnung erhält Einstein den Zusammenhang nach Gleichung Gl. A6.7:
$a = \frac{a_e}{\gamma^3}$ (vgl. [Pet] S. 61) Gl. A6.7
Damit liegt Backhaus [Back] konform mit Einstein.

Eigentlich könnte an dieser Stelle Schluss sein. Aber Einstein dachte noch weiter. Er postulierte, dass die auf das Elektron wirkende elektromotorische Kraft in Richtung der Relativbewegung invariant sein muss. Davon konnte er getrost ausgehen, da in die Lorentzkraft das Kreuzprodukt aus der Magnetfeldstärke und der Relativgeschwindigkeit eingeht. Nach der Rechten-Hand-Regel ist die Wirkung der Wechselwirkung damit immer senkrecht zur Bewegungsrichtung. Die Beschleunigung aus der Wechselwirkung eines relativ bewegten Elektrons im Magnetfeld zeigt also nie in die Bewegungsrichtung des Elektrons.
So folgt, wenn die mechanische Kraft F_m aus der Beschleunigung der elektromotorischen Kraft F_e gleich ist:
$F_m = F_e$ Gl. A6.8a
$m_e \cdot a_e = F_e$ Gl. A6.8b
und mit Gleichung Gl. A6.7
$m_e \cdot \gamma^3 a = F_e = F_m$ Gl. A6.8c

Der hier zu ziehende Schuss ist:
Ist die in x-Richtung wirkende Kraft aus der Wechselwirkung mit dem Magnetfeld auf das Elektron gleich null, gibt es auch keine Änderung der Beschleunigung in diese Richtung. Das bedeutet, dass sich die Änderung bei der Transformation ausschließlich auf die Masse auswirken kann. Deshalb schloss Einstein, dass die bewegte Masse des Elektrons sich dem relativ ruhenden Beobachter in x-Richtung wie folgt darstellt:
$m = m_e\gamma^3$ (vgl. [Pet] S. 62; vgl. [Ein2] S. 919)
Das Fazit bleibt, dass sich aus diesem Gedankengang keine Beschleunigungsänderung bei der Transformation der Beschleunigung in relativ bewegte IS ergeben darf. Also letztlich kann auch keine Zeitdilatation aus dieser Transformation abgeleitet werden.

Zeitdilatation aus Beschleunigung

Diese oben gewonnene Erkenntnis, dass durch eine Beschleunigung keine Zeitdilatation resultiert, ist verwunderlich.
Wenn es so viele Herleitungen gibt, die einen Einfluss der Transformation auf die Beschleunigung nachweisen wollen, zielen sie alle darauf ab, die relativistische Zeitdilatation dafür heranzuziehen.
Dass im vorangegangenen Punkt viele Fehler gezeigt wurden, die bei der Nutzung der Mathematik gemacht wurden, ändert nichts am Verfahren. Die Invarianz der Beschleunigung nachzuweisen, würde bedeuten, dass die Beschleunigung keinen Einfluss auf die Zeitdilatation hat. Also zeigt jede Rechnung, die eine Abhängigkeit der Beschleunigung in unterschiedlichen IS von der Relativgeschwindigkeit nachweist, dass es die Zeitdilatation geben muss.

Wenn diese Rechnungen aber alle falsch wären, könnte es sehr gut sein, dass Einsteins Einrede der Unabhängigkeit der Beschleunigung auf die Zeitdilatation zutreffend sein könnte. Allerdings spricht auch Einstein nicht von der Invarianz der Beschleunigung. Obwohl sie in seinem Schluss, dass die Veränderung der beschleunigten Bewegung bei der Transformation der Gleichungen auf die Änderung der Masse zurückzuführen sei (vgl. [Ein2] S. 919), gerade das suggerieren könnte.
Doch führt nicht Einstein all seine Überlegungen auf die Wechselwirkung geladener Teilchen im Magnetfeld zurück? Warum gibt es keinen entsprechenden Abschnitt über die Beschleunigung in seinem kinematischen Teil? Wenn er die Beschleunigungen nur im elektrodynamischen Teil seiner Abhandlung ([Ein2]) erwähnt, könnte es doch sein, dass diese Betrachtungen auf die Kinematik der neutralen Materie nicht übertragbar sind.

Hier greift J. Schulz (siehe [Schu2]) ein und versucht mit einfachen Mitteln der Lorentz-Transformation zu zeigen, dass aus der Beschleunigung keine Zeitdilatation abzuleiten ist. Er führt ein Gedankenexperiment durch, bei welchem er Lichtsignale von der Spitze und vom Boden einer Rakete zu der in der Mitte der Rakete positionierten Vergleichsuhr schickt. Dann findet er, dass in seiner „Rechnung zur Beschleunigung“ (ebd.) die Zeitdifferenz der Ankunft dieser beiden Lichtsignale unabhängig von einer Beschleunigung der Rakete immer in gleicher Weise zeitlich versetzt ankommen (vgl. Anl. 9).
Leider muss festgestellt werden, dass in seiner Rechnung keine Beschleunigung erwähnt wurde. Der Betrag der Beschleunigung ist in die Rechnung nicht eingegangen.
Was der Verfasser dort tut, ist das Aneinanderreihen zweier unbeschleunigter Prozesse. Es ist dem Bild A9.1 zu entnehmen, dass die betrachteten Prozesse linear eingezeichnet wurden und damit als geradlinig gleichförmig aufzufassen sind. Beschleunigte Prozesse sollten im Minkowski-Diagramm durch Kurven darzustellen sein.

Damit ist der Rückschluss auf eine nicht vorhandene Zeitdilatation durch den Einfluss einer Beschleunigung in diesem Fall unzulässig.

Man könnte und sollte diese Recherche nach Ideen zum Einfluss der Beschleunigung auf die Zeitdilatation fortsetzen. Es wird dabei wohl auffallen, dass sich die verwendeten Ansätze wiederholen und das Ergebnis dennoch nicht besser wird. Deshalb wird im Folgenden untersucht, wie sich Geschwindigkeit und Beschleunigung im Rahmen der SRT, wenn man sie denn unbedingt dort fassen will, auswirken.

Wirkt eine Beschleunigung im Rahmen der SRT, dann bedeutet das, dass man das Inertialsystem verlässt. Der Unterschied der Eigenzeit τ im beschleunigten System und der Zeit t_0 im ruhenden Ursprungs-Inertialsystem sollte „zusätzlich zum Effekt aus der Bewegung und den Trägheitseffekten“ ([Unb1]) vorhanden sein.
Mit dieser Aussage, dass es unlogisch wäre, die relativistische Effekte aus der Änderung des Weges nach der Zeit anzunehmen und die relativistischen Effekte aus der Änderung der Geschwindigkeit nach der Zeit zu verbieten, ist die Grundlage für eine offene Diskussion des Problems gelegt. Es hilft nicht, wenn man von dem Gedanken, dass die Ergebnisse durchgeführter Versuche nur eine Ursache für die Zeitdilatation zulassen, sich nur mit dem Nachweis beschäftigt, der die Beschleunigung als Dilatationsursachte ausschließen soll.

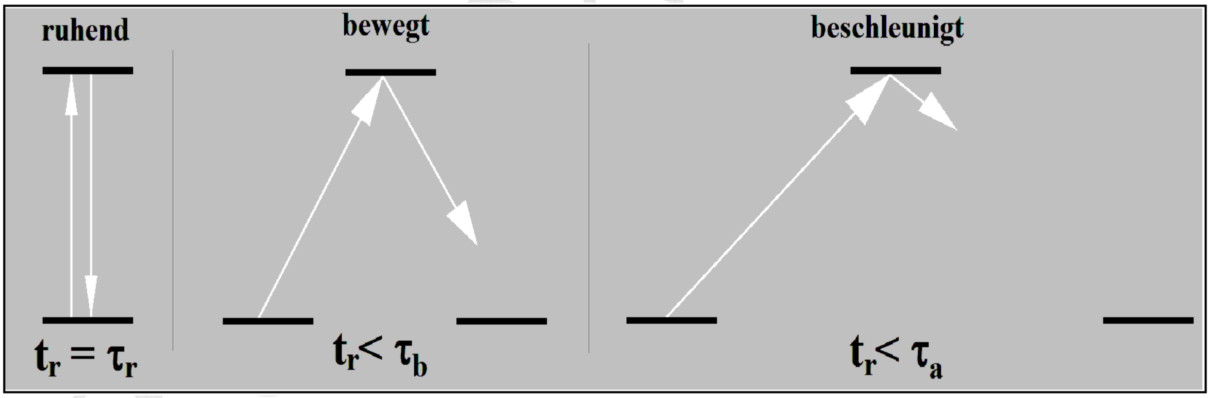

Bild 1: Zeitvergleiche in unterschiedlichen Bewegungszuständen

Ausgangspunkt für die Lösung des Problems ist die Frage, wie die Zeitdilatation begründet wird. Einstein geht von der Relativität der Gleichzeitigkeit aus. Er schickt einen Lichtimpuls von A nach B und erwartet, dass der Lichtimpuls von B nach A dieselbe Zeit benötigt (vgl. [Ein2] S. 894 und siehe Bild 1 linke Darstellung). Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist die Voraussetzung, um diesen Effekt in jeden IS beobachten zu können.
Nun wird untersucht, wie sich die Sache aus der Sicht relativ bewegter IS darstellt (siehe Bild 1 mittlere Darstellung). Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wird das Lichtsignal,

das einen längeren Weg zurücklegt, später wieder am Ausgangsort eintreffen. Damit wird auf die langsamer gehende Uhr geschlossen.
Dieser Gedanke wird üblicher Weise mit dem Gedankenexperiment der Lichtuhr verdeutlicht (vgl. [Mes] S. 623; vgl. [Syd2] S. 66 ff.).
Nun wird im Bild 1 (rechte Darstellung) gezeigt, dass so eine Lichtuhr auch dann Zeitdilatation registrieren muss, wenn sie beschleunigt ist. Es sollte in der Darstellung erkennbar sein, dass das Lichtsignal noch mehr Zeit benötigen sollte, als es das schon bei einer relativen Geschwindigkeit tut.
Im ruhenden Zustand gibt es keine Zeitdilatation. Also ist die Taktzeit t_r, die ein Photon zum einmaligen Durchlaufen der Lichtuhr benötigt, immer gleich τ_r und kann als Vergleichsgröße herangezogen werden.
Das Photon wird wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit eine längere Zeit zum Durchlaufen der Lichtuhr benötigen, wenn die Lichtuhr bewegt ist. Die Taktzeit τ_b des bewegten Beobachters wird größer sein, als die des ruhenden.
Wenn der Bewegungsablauf zusätzlich beschleunigt wird, sollte doch offensichtlich sein, dass die Taktzeit τ_a des beschleunigten Beobachters eine noch größere ist. Also ohne jegliche Spekulation darüber anzustellen, welcher formelmäßige Zusammenhang zwischen der Beschleunigung einer Uhr und der von ihr angezeigten Zeitdilatation besteht, muss es einen Zusammenhang zwischen der Beschleunigung und der Zeitdilatation geben oder anders herum gesagt, die Beschleunigung kann auch in der SRT nicht ohne Einfluss auf die Zeitdilatation sein.

Will man nun einen Ansatz finden, um die Transformation von Beschleunigungen vornehmen zu können, kann man sich an den o. g. Vorbildern orientieren.
Üblicherweise wird zur Herleitung einer Transformationsformel für die Beschleunigung die Formel der Geschwindigkeitsaddition herangezogen. Der zugrundeliegende Gedanke dabei ist, dass die Formel der Geschwindigkeitsaddition aus der SRT ableitbar ist und somit deren Anwendung zu einem relativitätskonformen Ergebnis führen muss.

Es gibt aber auch andere Ansätze (s. S. 5). Ein solcher Ansatz soll hier verfolgt werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Beschleunigung als die Änderung Δv im Zeitintervall Δt aufzufassen ist:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{Gl. 9}$$

Unterstellt man nun, dass die Geschwindigkeit v als Relativgeschwindigkeit zu allen Zeitpunkten t in beiden IS, von denen die Beschleunigung betrachtet wird, immer identisch sein muss, ist von der Unveränderlichkeit, der Invarianz der Geschwindigkeitsänderung auszugehen.
Nicht invariant ist hingegen die Zeitspanne Δt. Damit ergäbe sich die Beschleunigung in simpelster Weise zu:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta \tau}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \text{Gl. 10}$$

Aus den Gleichungen Gl. 9 und Gl. 10 lässt sich die folgende Konsequenz ableiten. Wenn die bewegten Uhren langsamer gehen, ist die Beschleunigung im bewegten System geringer. Das Maß, in welchem hier Veränderungen stattfinden, ist dabei identisch. Also werden Beschleunigungen im selben Maße geringer bewertet, wie Zeitdauern länger wahrgenommen werden.
Damit liegt der Schluss nahe, dass aus der Beschleunigung ebenso Zeitdilatationen abzuleiten sind, wie es aus Relativgeschwindigkeiten durch die SRT hergeleitet wird.

Offen bleibt aber, wenn man den Gedanken der Zeitdilatation aus einer Beschleunigung zulässt, ob sich derartige Zeitdilatationen aus Relativgeschwindigkeit und Beschleunigung überlagern oder man sich für eine Ursache der Zeitdilatation entscheiden muss.
Hier wird bei Maurer (siehe [Mau]) auf die „T.A.O.-Matrix-Theorie“ (ebd.) hingewiesen, aus der hervorgeht, dass „[…] Körper tatsächlich gestaucht [werden], solange eine Kraft anliegt“ (ebd.). Und Kräfte sind mit Beschleunigungen verbunden. Fehlen die Kräfte und handelt es sich um den die SRT, ist festzustellen: „Gleichförmige Bewegungen heben die Kontraktion auf“ (ebd).

Wenn aber die Wissenschaft so weit geht, dass sie von der Gravitation auf eine Zeitdilatation schließt, diese aber der Beschleunigung nicht zugesteht, hebelt sie damit das Äquivalenzprinzip aus.
Dann kann sie auch soweit gehen, dass es die Zeitdilatation aus Beschleunigungen gibt und hätte damit die Dilatation aus der Relativgeschwindigkeit zu negieren. Sie muss sich nur darauf einlassen, dass sämtliche nachweislichen Zeitdilatationen nicht aus einer Geschwindigkeit herrühren, sondern einer bis dahin nicht beachteten Beschleunigung geschuldet sind.
Dann kann das Äquivalentprinzip gerettet werden.

Anlagen

Anlage 1: Beschleunigung nach [Mar] S. 153 f

Aufgabe ist es, die Beschleunigung eines Objektes P aus zwei unterschiedlichen IS zu bewerten. Dabei sei die Bedingung, dass die x-Richtung des einen IS S mit der Bewegungsrichtung des Objektes und der x'-Richtung des anderen IS S' übereinstimmt.
Dann wird von der Formel der Geschwindigkeitsaddition ausgegangen:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \qquad \text{Gl. A1.1}$$

Die verwendeten Variablen sind:

v die Geschwindigkeit des Objektes im System S
v' die Geschwindigkeit des Objektes im System S'
V die Relativgeschwindigkeit zwischen S und S'
c bekanntermaßen die Lichtgeschwindigkeit

Dann ist die Zeit im System S:

$$t = \frac{1}{\beta}\left[t' + \frac{Vx'}{c^2}\right] \qquad \text{Gl. A1.2}$$

Mit den Variablen:

t Zeit im System S
t' Zeit im System S'
x' der zur Zeit t' zurückgelegte Weg x'
β der reziproke Relativitätskoeffizient $\beta = \sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}}$ (beachte Quelle[1])

Nach o. g. Quelle nimmt man nun die Differentiale beider Formeln und dividiert sie durcheinander:

$$dv = \frac{dv'}{1 + \frac{v'V}{c^2}} - \frac{v' + V}{\left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right)^2}\left[\frac{V}{c^2}\right] dv \qquad \text{Gl. A1.3}$$

$$dt = \frac{1}{\beta}\left[dt' + \frac{Vdx'}{c^2}\right] \qquad \text{Gl. A1.4}$$

So verlockend diese (Gl. A1.3 und Gl. A1.4) Gleichungen auch aussehen und zum Weiterrechnen einladen, so unmöglich sind sie nachzuvollziehen.
Wenn auch zu erkennen ist, dass hier eine Ableitung durchgeführt wurde, ist leider nicht erkenntlich, wonach abgeleitet wurde. Das Bilden von Differentialen setzt das saubere Ableiten nach einer Ableitungsgröße voraus.
Wenn in Gleichung Gl. A1.3 der erste Summand der rechten Seite nach einer Variablen abgeleitet wurde, nicht v' ist, zeigt das Ergebnis des zweiten Summanden der rechten Seite, dass genau danach abgeleitet wurde. Ebenso zeigt die Gleichung Gl. A1.4, das keineswegs nach t abgeleitet wurde, da sonst auf der linken Seite 1 stehen müsste.

[1] beachte die falsche Schreibung in der Quelle

Anlage 2: Beschleunigung nach [D.H]

Hier ist der Ansatzpunkt sehr einfach gehalten.
Wenn ein Beobachter von seinem IS S‘ einen Punkt im relativ zu ihm bewegten IS S beobachtet, wird er feststellen, dass sich die Geschwindigkeit v‘ dieses Punktes ändert, wenn das IS beschleunigt sein sollte. Diese Geschwindigkeitsänderung setzt er ins Verhältnis zur Zeit und findet die Beschleunigung a'_{eff}, die seiner Meinung nach der Punkt hat.
Nun überlegt er, wie das wohl der Beobachter im IS S diese Beschleunigung messen würde. Er sagt sich, dass der Beobachter in S die Relativgeschwindigkeit v hat und in einem differentiell kleinen Zeitintervall die Geschwindigkeitsänderung dv feststellen sollte.
Da sich die Geschwindigkeit v des IS S mit der Geschwindigkeitsänderung dv addiert, der Beobachter in S aber die Relativgeschwindigkeit v nicht registriert, ist von folgendem Ansatz auszugehen:

$$a_{eff} = \frac{dv}{dt} \qquad \text{Gl. A2.1}$$

Hier sollte a_{eff} also die Beschleunigung des Punktes sein, die der Beobachter im gestrichenen System wahrnimmt. Das so zu definieren, folgt dem Gedanken, dass der Wert der Beschleunigung relativ ist und für jeden Beobachter unterschiedlich ausfallen sollte. Andernfalls wäre die Beschleunigung invariant und jedwede Überlegung bezüglich einer Transformation wäre überflüssig.

Offensichtlich geht der Verfasser dieser Herleitung davon aus, dass die Änderung der Geschwindigkeit gerade der Gesamtgeschwindigkeit minus der Relativgeschwindigkeit ist. Zerlegt man die Gesamtgeschwindigkeit in $v_g = v + dv$, ergibt sie sich als Summe der Relativgeschwindigkeit v und der Geschwindigkeitsänderung dv. Es folgt:

$$a_{eff} = \frac{v_g - v}{dt} = \frac{v + dv - v}{dt} \qquad \text{Gl. A2.2}$$

Bei einer Transformation der Geschwindigkeiten ist für die Gesamtgeschwindigkeit die relativistische Addition der Geschwindigkeiten zu beachten, während die Relativgeschwindigkeit invariant ist. Damit lässt sich die Gleichung nach ihrer Transformation wie folgt aufstellen:

$$a_{eff} = \frac{\frac{v+dv}{1+\frac{vdv}{c^2}} - v}{dt} = \frac{v + dv - v - \frac{v^2 dv}{c^2}}{dt\left(1+\frac{vdv}{c^2}\right)} = \frac{dv\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{dt\left(1+\frac{vdv}{c^2}\right)} \text{ (vgl. [D.H])} \qquad \text{Gl. A2.3}$$

Weiter folgt dann für $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, a = dv/dt und für die Annahme, dass dv gegen null geht:

$$a_{eff} = \frac{dv}{\gamma^2 dt} = \frac{a}{\gamma^2} \qquad \text{Gl. A2.4}$$

Ob die getroffene Annahme für dv = 0 berechtigt ist, bleibt zu beweisen.

Anlage 3: Beschleunigung nach [Bis]

Um auf den Zusammenhang zwischen der Relativbewegung und der Wahrnehmung von Beschleunigungen zu kommen, wird hier das probate Mittel der benutzt, zuerst die Verhältnisse der Geschwindigkeitswahrnehmung zu erkunden. Dass die Beschleunigung dann lediglich die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit ist, ist per Definition bekannt.

Wenn für die Geschwindigkeit in der SRT die allgemein bekannte Additionsformel der Geschwindigkeiten herangezogen wird, so ist das bei einer beschleunigten Bewegung nicht einfach zu übernehmen. In die Bewegung als Funktion der Zeit wird die Beschleunigung nun ebenfalls Eingang finden müssen. Dabei wird üblicherweise von einer konstanten Beschleunigung ausgegangen. Damit vereinfacht sich der rechentechnische Prozess der Differentiation, wenn die Beschleunigung als zeitliche Konstante in ihrer Ableitung zu null wird.
Dass die Beschleunigung aus der Sicht eines relativ Bewegten dann aber bestimmt keine zeitunabhängige Variable ist, zeigt das Ergebnis dieser Anlage. Die Aussage, die sich damit für die Relativität ergibt, also die Umkehrung der Berechnung, bleibt unbeantwortet.

In ([Bis] Bewegungsgl. (1)) wird von der Kraftwirkung und dem daraus resultierenden Impuls auf eine Masse auf die beschleunigte Bewegung dieser Masse geschlossen (vgl. [Schn] Absch. ‚Relativistische Dynamik‘). Es werden einige Vereinfachungen getroffen, die den Prozess theoretisieren, sodass er auf die Gegebenheiten der SRT angepasst wird.

Bei der Transformation der die Masse antreibenden Kraft in ein relativ ruhendes System wird davon ausgegangen, dass die zeitliche Komponente der Kraft (also die durch die Zeitdilatation hervorgerufene Kraftkomponente) für die weiteren „Berechnungen keine Bedeutung“ ([Bis] Bewegungsgl. (1) S. 2) hat. Insofern wird nur mit der x-Komponente weitergerechnet.
Diese x-Komponente wird in (ebd. S. 3) angegeben mit der Formel:

$$K^1 = m\frac{du^1}{d\tau} \qquad \text{Gl. A3.1}$$

Darin ist K^1 die x-Dimension der Kraft, $d\tau$ ein Differential der Eigenzeit der Masse und du^1 die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung.
Will man diese Formel des Systems der beschleunigten Masse in das relativ ruhende System transformieren, ist $K^1 = \gamma F$ und $d\tau = dt/\gamma$ zu substituieren (ebd.):

$$\gamma F = \gamma m\frac{du^1}{dt} \qquad \text{Gl. A3.2}$$

Nun wird über die Annahme, dass „$u^1 = \gamma\cdot v_x = \gamma\cdot v$“ (ebd.) sein soll, auch die Geschwindigkeit u^1 vom System der beschleunigten Masse in das Ruhende System transformiert. Dieser Ansatz resultiert aus der Berechnung der Vierergeschwindigkeit, das Weltlinienelement hernimmt, um es durch eine Zeitspanne (resp. Zeitdifferential) zu dividieren.

So folgt aus Gleichung Gl. A 3.1:

$$F = ma_M = \gamma m \frac{dv}{dt} \qquad \text{Gl. A3.3}$$

Während sich in Gleichung Gl. A3.1 das γ noch rausgekürzt hat, ist es jetzt wieder in der Gleichung Gl. A3.2 enthalten. Es resultiert daraus, dass bei der Darstellung der Geschwindigkeit das Weltlinienelement als invariant anzunehmen ist und die Zeit hier ebenso mittels $d\tau = dt/\gamma$ transformiert wird.

Erkennt man dann, dass die Beschleunigung a_M der Masse zuzuordnen ist und diese Beschleunigung sich nach der Transformation gerade aus $a = dv/dt$ ergibt, müsste aus Gleichung Gl. A3.1 folgen:

$$a_M = \gamma a \qquad \text{Gl. A3.4}$$

Doch der Verfasser dieser Rechnung sieht in Gleichung Gl. A3.3 eine Differentialgleichung, die es zu integrieren gilt, um das Ergebnis zu erhalten. Er macht den Ansatz zum Integrieren, indem er beide Seiten der Gleichung Gl. A3.3 nach t Integriert:

$$F = m \frac{d}{dt}(\gamma \cdot v(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}}\right) \text{ (ebd.)} \qquad \text{Gl. A3.5}$$

Mit Gleichung Gl. A3.5 sortiert der Verfasser die rechte Seite der Gleichung Gl. A3.3 so, dass das Differential dt im Nenner herausgestellt wird. Leider macht er hier Missgriff, das Differential der Geschwindigkeit dv(t) zu zerteilen. Das führt in seiner weiteren Rechnung zu einem Fehler, wo er das d des Differentials unter den Tisch fallen lässt.

Korrekter Weise und wesentlich einfacher wäre die Gleichung Gl. A3.3, wenn man sie denn unbedingt integrieren wollte, in folgender Weise aufzustellen:

$$Fdt = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv \qquad \text{Gl. A3.6}$$

Es folgte:

$$\int F\, dt = \int \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv \qquad \text{Gl. A3.7}$$

$$Ft = m \cdot c \cdot \arcsin\left(\frac{v}{c}\right) \qquad \text{Gl. A3.8}$$

Diese Gleichung Gl. A3.8 ist eine Gleichung von Impulsen, die vorerst nicht weiter zu sinnfälligen Aussagen bezüglich der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung führt.

Anlage 4: Beschleunigung nach [Urb]

Die Herleitung der relativistischen Beschleunigungstransformation geht hier von einem nachvollziehbaren Ansatz aus.

Die beschriebene Situation ist die allseits bekannte: Ein Raumschiff wird mit konstanter Beschleunigung beschleunigt. Im System der Rakete wird die Änderung der Geschwindigkeit mit:

$\mathrm{dv} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{dT}$ ([Urb] S. 1) Gl. A4.1

wahrgenommen. Sicherlich ist zu diskutieren, wie die Geschwindigkeitszunahme im Rahmen der SRT gemessen werden soll.

Es folgt also, dass die Geschwindigkeit v des Raumschiffs sich als Funktion der Zeit ändert. Da beispielsweise von der Erde die Änderung der Geschwindigkeit nicht als simple Summe aufgefasst werden darf, ist sie nach dem relativistischen Additionstheorem der Geschwindigkeiten zu ermitteln:

$\mathrm{v_{Erde}} = \mathrm{f(v + dv)} = \frac{\mathrm{v+a \cdot dT}}{1+\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}^2}\mathrm{a \cdot dt}}$ (vgl. ebd.) Gl. A4.2

Auch hier möchte der Verfasser der Rechnung integrieren. Da ihm das aber für die Gleichung Gl. A4.2 zu kompliziert erscheint, vereinfacht er diese. Er geht mit der Umformung der Gleichung nach Taylor (siehe [Syd1]) von der Form:

$\frac{1}{1+\mathrm{x}} \approx 1 - \mathrm{x}$ Gl. A4.3

zur Gleichung:

$\mathrm{v_{Erde}} = \mathrm{v} + \mathrm{dv} \approx (\mathrm{v} + \mathrm{a} \cdot \mathrm{dT})\left(1 - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}^2}\mathrm{a} \cdot \mathrm{dT}\right)$ Gl. A4.4

über. Damit, so begründet der Verfasser seinen Schritt, gilt die Gleichung allemal für kleine x (resp. v << c).

Leider passiert ihm beim Ausmultiplizieren der Klammern der rechten Gleichungsseite ein fataler Fehler. Er unterschlägt das 4. Glied der Multiplikation:

$\mathrm{v} + \mathrm{a} \cdot \mathrm{dT} - \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}\mathrm{a} \cdot \mathrm{dT} - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}^2}(\mathrm{a} \cdot \mathrm{dT})^2 \neq \mathrm{v} + \mathrm{a} \cdot \mathrm{dT} - \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}\mathrm{a} \cdot \mathrm{dT}$ Gl. A4.5

So schön auch die weitere Rechnung ist, sie führt zwangsläufig in die Irre.

Anlage 5: Beschleunigung nach [Her]

In dem physikalischen Fachbuch von Hering ([Her] S. 875 f.) findet sich die folgende Herleitung.
Ausgehend vom relativistischen Massezuwachs:

$$\mathrm{m(v)} = \frac{\mathrm{m_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2}} = \gamma \mathrm{m_0} \quad \text{(ebd. S. 875 Gl. 10.10)} \qquad \text{Gl. A5.1}$$

Daraus folgt der relativistische Impuls als Produkt aus Masse mal Geschwindigkeit:

$$\boldsymbol{p} = \mathrm{m(v)}\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{m_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2}}\boldsymbol{v} = \gamma \mathrm{m_0}\boldsymbol{v} \quad \text{(ebd. S. 876 Gl. 10.11)} \qquad \text{Gl. A5.2}$$

Auffällig ist in dieser Formel, dass es fett geschriebene Variablen gibt. Das sind der Impuls $\boldsymbol{p}$ selbst und die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Damit ist angedeutet, dass diese Größen vektoriell sind, sie also nicht zwingend in die x-Richtung der IS gerichtet sein müssen.
Höchst unglücklich ist, dass die Relativgeschwindigkeit v im Relativitätskoeffizienten nicht als solche vektorielle Größe aufgefasst und sie dennoch mit v bezeichnet wird. Das führt im Folgenden zu einer Irritation.

Der einfache Gedankensprung vom Impuls $\mathrm{Ft} = \mathrm{mv}$ ist der, dass sich die Kraft aus der Ableitung des Impulses nach der Zeit ergibt. Es folgt:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{m_0}\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2}} \quad \text{(ebd. S. 876 Gl. 10.12)} \qquad \text{Gl. A5.3}$$

Wobei die Relativgeschwindigkeit als Konstante aufgefasst wird (siehe ebd. S. 876).

Im nächsten Schritt wird dann direkt auf die 3 Komponenten der Kraft hingewiesen, die sich bei der Ableitung der Gleichung Gl. A5.3 ergeben müssen. Betrachtet man beispielsweise in der Atomphysik die Kraftwirkungen auf ein im Magnetfels beschleunigtes Elektron, „ist i. Allg. die Beschleunigung nicht parallel zur Kraft“ (ebd.).
Hier soll aber gerade dieser Fall angenommen werden. Dann folgt die Kraft zu:

$$\mathrm{F_x} = \frac{\mathrm{m_0 a_x}}{\left[1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2\right]^{3/2}} = \mathrm{m_0}\gamma^3\mathrm{a_x} \quad \text{(ebd. S. 876 Gl. 10.13)} \qquad \text{Gl. A5.4}$$

Leider wird an dieser Stelle kein Hinweis auf die Ausführung der Ableitung gegeben. Offensichtlich ist nur, dass hier die Gleichung Gl. A5.3 nicht nach der Zeit abgeleitet wurde. Dann wäre für a = d$\boldsymbol{v}$/dt und v = const die Kraft F nach Gleichung Gl. A5.5 herausgekommen:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{m_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2}}\mathrm{a} = \mathrm{m_0}\gamma a \qquad \text{Gl. A5.5}$$

Unterstellte man aber keineswegs sinnloser Weise und der Verwendung der identischen Variable v für die Geschwindigkeit, dass die Relativgeschwindigkeit v als Veränderliche aufzufassen ist, sähe die Ableitung wie folgt aus. Die Ableitung erfolgt nach der Differentiationsregel: (u'v-uv')/v^2 (vgl. [Göh] S. 67):

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{m}_0 \frac{dv}{dt}\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2} - \mathrm{m}_0 v \frac{2v}{2c^2\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2}} \cdot \frac{dv}{dt}}{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2} = m_0 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2}} - \frac{v^2}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2}}\right]\frac{dv}{dt} \qquad \text{Gl. A5.6a}$$

$$\mathrm{F} = m_0 a \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2}} = m_0 a\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2} = \frac{m_0 a}{\gamma} \qquad \text{Gl. A5.6b}$$

Der wirkliche Hintergrund der Herleitung ist in Anl. 6 beschrieben.

Anlage 6: Beschleunigung nach [Ein1]

Einstein hatte in seiner Arbeit einen Abschnitt „Dynamik des (langsam beschleunigten) Elektrons“ ([Ein2] S. 917 ff.) der relativistischen Transformation der Beschleunigung gewidmet. Allein der Titel des Abschnitts wirft sofort die Frage auf, warum er diese Art des Vorgangs der langsamen Beschleunigung so hervorhebt.
Abgesehen davon, dass Einstein dieses ‚langsam beschleunigen‘ nicht näher definiert, sind Elektronen wegen ihrer sehr geringen Masse schon bei der Anwendung geringster Kräfte stark beschleunigt. Sind dann die in diesem Abschnitt gemachten Aussagen nicht mehr gültig?
Die Antwort findet sich erst 3 Seiten weiter hinten ([Ein2] S. 920). Dort weist Einstein darauf hin, dass für weitere Untersuchungen hinsichtlich energetischer Betrachtungen, dass die Abgabe von Strahlungsenergie durch starke Beschleunigungen ausgeschlossen werden soll.

Diese Herleitung ist unter Zugrundelegung von [Pet] kommentiert, da dort schon Verständnisprobleme ausgemerzt wurden.
Der Ausgangspunkt Einsteins, bei dem dieser von der Bewegung eines Elektrons im Magnetfeld ausging, führt bekanntermaßen zu einer gekrümmten Bahn des Elektrons. Da in dieser Arbeit aber die translative Beschleunigung untersucht werden soll, wird sich auf die Gleichungen in der x-Richtung beschränkt.
Ansatz ist für Einstein, dass das magnetische Feld über die Feldstärke am Ort des Elektrons auf die Ladung des Elektrons eine Kraft F_e ausübt. Dieser Kraft widersteht die Trägheitskraft F_T als Produkt aus Masse mal Beschleunigung.

$$\mathrm{F_e} = \mathrm{ma} \qquad \text{Gl. A6.1}$$

Die Beschleunigung ist als die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit definiert:

$$\mathrm{F_e} = \mathrm{m}\frac{dx'}{dt'} \qquad \text{Gl. A6.2}$$

Nun erkennt Einstein, dass es im bewegten System des Elektrons eine Summation der Relativgeschwindigkeit v zwischen den betrachteten Systemen und dem beschleunigten Elektron gibt. Deshalb wendet er seine zuvor gefundene Additionsformel für Geschwindigkeiten an, um zu seiner Beschleunigungstransformation zu gelangen. Er bezeichnet die Geschwindigkeit des Elektrons w_e im elektroneneigenen System und transformiert diese in das ruhende System:

$$w = \frac{w_e+v}{1+\frac{w_e v}{c^2}} \text{ (vgl. [Ein2] S. 905)} \qquad \text{Gl. A6.3}$$

Mit dieser Formel arbeitet er weiter unter der Maßgabe, dass die Relativgeschwindigkeit v = const ist:

$$a = \frac{dw}{dt} = \frac{\frac{dw_e}{dt}\left(1+\frac{w_e v}{c^2}\right)-(w_e+v)\frac{v}{c^2}\frac{dw_e}{dt}}{\left(1+\frac{w_e v}{c^2}\right)^2} \text{ (vgl. [Pet] S. 61)} \qquad \text{Gl. A6.4}$$

Nun greift Einstein zu einem Kunstgriff. Er legt fest, dass die Geschwindigkeit w_e des Elektrons im System des Elektrons gerade null sein muss. Aber wegen der wirkenden

Beschleunigung ist die Änderung dw_e/dt nicht zwingend null. Also kann er in Gleichung Gl. A6.4 nur den Wert $w_e = 0$ setzen:

$$a = \frac{\frac{dw_e}{dt} - v\frac{v}{c^2}\frac{dw_e}{dt}}{(1+0)^2} = \frac{dw_e}{dt}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$ Gl. A6.5

Will er nun aber die Ableitung der Änderung der Elektronengeschwindigkeit sinnvoll durchführen, muss er nach der Zeit im System des Elektrons ableiten. Dazu ist die folgende Substitution durchzuführen:

$$\frac{dt_e}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$ Gl. A6.6

Betrachtet man dann noch die Ableitung der Geschwindigkeitsänderung des Elektrons in seinem System als die Beschleunigung a_e des Elektrons, folgt:

$$a = a_e\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a_e}{\gamma^3}$$ (vgl. [Ein2] S. 919) Gl. A6.7

Anlage 7: Beschleunigung nach [Bob]

Der Ansatz hier besteht in der Formulierung des Problems mittels Vektoren.

$$\mathrm{b}^{\mu} = \frac{\mathrm{du}^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} \text{ (ebd. Gl. 5.5)} \qquad \text{Gl. A7.1}$$

In diesem Ansatz nach Gleichung Gl. A7.1 steckt der 4er-Vektor b^{μ} drin. Dabei bedeutet das b die Beschleunigung und das μ keinen Exponenten, der eine Potenz ausdrückt, sondern es handelt sich dabei um die Schreibweise von Vektoren. Es gilt μ = 0; 1; 2; 3. Mit μ sind also die 4 Dimensionen des 4-dimensionalen Raumes gemeint. Die 0-te Dimension ist die mit der Lichtgeschwindigkeit normierte Zeit ct. Die anderen Dimensionen von 1 bis 3 sind die Dimensionen des Raumes, die üblicherweise als x, y und z bekannt sind.
Als u wird die Geschwindigkeit eines Objektes in einem bewegten System bezeichnet. Auch u ist ein solcher 4er-Vektor. Um die Beschleunigung auszudrücken ist u nach der Eigenzeit τ abzuleiten.
Das Prozedere kann fortgeführt werden. Die Beschleunigung ergibt sich auch als 2. Ableitung der Raumdimensionen x^{μ} dieses Systems.
Stellt man die Schreibweise auf Vektoren um, folgte:

$$\mathrm{b}^{\mu} = \frac{\mathrm{du}^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{bmatrix} \mathrm{c} \\ \dot{\mathrm{x}}^{1,2,3} \end{bmatrix} \qquad \text{Gl. A7.2}$$

In dieser Gleichung Gl. A7.2 ist lediglich die Geschwindigkeit u als Vektor der Zeitdimension und der 3 Raumdimensionen dargestellt. Die Raumdimensionen erhalten einen Punkt als Zeichen, dass sie bereits nach der Zeit abgeleitet wurden. Die Ableitung der Zeit führt wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit auf c.

Um nun zu transformieren, ist von der Eigenzeit τ des Objektes auf die Zeit t im transformierten System umzustellen. Das erfolgt mittels der bekannten Beziehung:

$$t = \gamma\tau \ \text{ mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{Gl. A7.3}$$

Damit entsteht für den Verfasser der Rechnung aus Gleichung Gl. A7.2:

$$\mathrm{b}^{\mu} = \gamma\frac{\mathrm{du}^{\mu}}{\mathrm{dt}} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\gamma\begin{pmatrix} \mathrm{c} \\ \dot{\mathrm{x}}^{1,2,3} \end{pmatrix}\right] \text{ (siehe [Bob] S. 30)} \qquad \text{Gl. A7.4}$$

Hierin wurde offensichtlich die Transformation der Geschwindigkeit u in das zu transformierende System mit $u_{trans} = \gamma u$ vorgenommen worden. Leider korrespondiert dieser Kunstgriff nicht mit den Vorgaben der SRT.
Das Ergebnis der Transformation:

$$\mathrm{b}^{\mu} = \gamma^4\frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{\mathrm{c}^2}\begin{pmatrix} \mathrm{c} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \gamma^2\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4\frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{\mathrm{c}} \\ \gamma^2\dot{\mathbf{v}} + \gamma^4\frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{\mathrm{c}^2}\mathbf{v} \end{pmatrix} \text{ ([Bob] S. 30)} \qquad \text{Gl. A7.5}$$

ist damit sicherlich bemerkenswert, entbehrt aber der Nähe zur SRT.

Anlage 8: konstante Beschleunigung nach [D.H]

In der Anl. 2 wurde bereits die Herleitung der Beschleunigung nach [D.H] erläutert und kritisiert. In dieser Anlage setzt D.H voraus, dass es sich bei der Beschleunigung um eine konstante handeln soll. Es wirke also auf ein Objekt eine konstante Kraft, die das Objekt beschleunigt.

Zur Abkürzung der Formeln wird wieder der Relativitätskoeffizient mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ benutzt.

Ansatzpunkt der Überlegung ist eine der relativistischen Additionsformel der Geschwindigkeiten ähnlich sehende Gleichung (Gl. A8.1)

$$v(t) = \frac{at+v_0\gamma_0}{\sqrt{1+\frac{(at+v_0\gamma_0)^2}{c^2}}} \qquad ([D.H]) \qquad \text{Gl. A8.1}$$

Dass in dieser Formel das a·t der Geschwindigkeit v im System des Objektes sein soll, ist nachvollziehbar. Auch kann man sich denken, dass die Geschwindigkeit v_0 der Relativgeschwindigkeit entsprechen soll. Warum dann allerdings diese Relativgeschwindigkeit mit einem Relativitätskoeffizient behaftet ist, bleibt ungeklärt.

Ebenso fraglich ist die Wurzel im Nenner, die in der Gleichung der Additionstheoreme nicht vorhanden ist.

Der Ansatz in Gleichung Gl. A8.1 erfordert also noch einige Erklärung, die vom Verfasser nicht gegeben werden.

Alsdann wird angenommen, dass eine vergangene Eigenzeit im System des Objektes der Aufsummierung aller infinitesimalen Zeitabschnitte im System eines relativ bewegten Beobachters entspricht.

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}\,dt \qquad ([D.H]) \qquad \text{Gl. A8.2}$$

Setzt man nun in die Gleichung Gl. A8.2 die Gleichung Gl. A8.1 ein, kann beispielsweise mittels Integralrechner im Internet die folgende Formel gefunden werden:

$$\tau = \frac{c}{a}\ln\left(\frac{\sqrt{c^2+(at+v_0\gamma_0)^2}+at+v_0\gamma_0}{(c+v_0)\gamma_0}\right) \qquad ([D.H]) \qquad \text{Gl. 8.3}$$

Die Formel würde nun aussagen, dass eine Zeitspanne τ in der Eigenzeit eines beschleunigten Systems in gezeigte Weise von der Zeitspanne t [0; t] abhängt.

Dieser Zusammenhang in Gleichung Gl. A8.3 darf berechtigt angezweifelt werden, da einerseits die Ausgangsgleichung fragwürdig ist und andererseits unter der Annahme a = 0 die Zeitspanne im System des Objektes immer gegen unendlich gehen würde.

Anlage 9: Zeitdilatation nach [Schu2]

In der folgenden Berechnung geht es nicht um die Transformation einer Beschleunigung, sondern um die Ermittlung der Zeitdilatation einer beschleunigten Rakete.
Die Rakete beherberge 3 Uhren, die sich mitsamt der Rakete in x-Richtung eines Koordinatensystems bewegen. Die Uhren A, B und C seien derart verteilt, dass der Abstand von C-A = L/2 und B-C = L/2 ist. Nun sollen gleichzeitig 2 Lichtblitze von A nach C und von B nach C ausgesendet werden. Die Situation wird für den nichtrelativistischen Bereich und den relativistischen Bereich gesondert ausgewertet.

Der Verfasser stellt diese Situation im Minkowski-Diagramm (siehe Bild A9.1) dar.

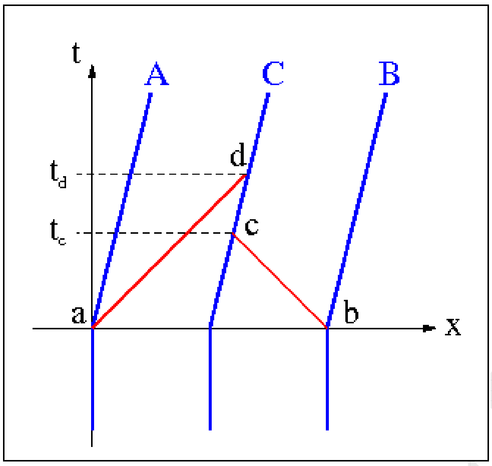

Bild A9.1: Minkowski-Diagramm dreier Punkte, die sich mit gleicher Geschwindigkeit in x-Richtung durch den Raum bewegen

Zum Ersten wird die Situation betrachtet, bei der die Relativgeschwindigkeit der Rakete zu einem ruhenden Beobachter nichtrelativistisch ist. Dazu werden die Zeiten berechnet, wann die beiden bei A und B ausgesendeten Lichtblitze am Punkt C ankommen:

$$\Delta t_{C-A} = t_C - t_A = \frac{L}{2(c+v)} - 0 \qquad \text{Gl. A9.1}$$

$$\Delta t_{B-C} = t_B - t_C = 0 + \frac{L}{2(c-v)} \qquad \text{Gl. A9.2}$$

Definiert man nun die Zeitdilatation als die Differenz beider Zeitspannen, ergibt sich:

$$\Delta t = \Delta t_{C-A} - \Delta t_{B-C} = \frac{L}{2(c+v)} - \frac{L}{2(c-v)} = \frac{L}{2} \cdot \frac{c-v-c-v}{c^2-v^2} = -\frac{Lv}{c^2-v^2} = -\gamma^2 \frac{v}{c^2} L \qquad \text{Gl. A9.3}$$

Dass es eine messbare Zeitdifferenz nach Gleichung Gl. A9.3 geben sollte, ist nach klassischer Physik nachvollziehbar.

Im zweiten Fall wird dasselbe Experiment bei relativistischen Geschwindigkeiten durchgeführt. Es sind also die bekannten Formeln der Lorentz-Transformation mit dem Relativitätskoeffizienten γ (siehe Gl. A7.3) anzuwenden:

$$x' = \gamma(x - tv) \qquad \text{Gl. A9.4}$$

$$t' = \gamma\left(t - {}^{xv}/_{c^2}\right) \qquad \text{Gl. A9.5}$$

Mit diesen Formeln sind vorab die Zeitpunkte zu berechnen, wann die Lichtsignale sich an den betrachteten Orten befinden. Mit den Indizes a, b, c und d sind die Ereignisse bezeichnet, zu denen sich ein Lichtsignal am entsprechenden Ort zu einer entsprechenden Zeit befindet:

$$x_a = 0; \quad t_a = 0; \quad x'_a = 0; \quad t'_a = 0 \qquad \text{Gl. A9.6a}$$

$$x_b = L; \quad t_a = 0; \quad x'_b = \gamma L; \quad t'_b = -\gamma \frac{v}{c^2} L \qquad \text{Gl. A9.6b}$$

Die Werte in Gleichung Gl. A9.6 ergeben sich aus der Festsetzung der Werte im ruhenden System und durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen Gl. A9.4 und Gl. A9.5.
Nun sind nach demselben Prinzip die Werte für das Eintreffen der Lichtsignale an der Uhr C zu bestimmen:

$$x_c = \frac{L}{2} + \frac{vL}{2(c+v)}; \quad t_c = \frac{L}{2(c+v)} \qquad \text{Gl. A9.7a}$$

$$x'_c = \gamma\left(\frac{L}{2} + \frac{vL}{2(c+v)} - \frac{vL}{2(c+v)}\right) \quad t'_c = \gamma\left(\frac{L}{2(c+v)} - \frac{Lv}{2c^2} - \frac{v^2L}{2c^2(c+v)}\right) \qquad \text{Gl. A9.7b}$$

Der Ort c_c der Uhr C im System der Rakete befindet sich nach der Zeit t_c um vt_c vom Ursprung L/2 entfernt. Die Zeitspanne ermittelt sich nach Gleichung Gl. A9.1.
Damit folgt dann für dieselben Parameter im System des Beobachters, der die Punkte in der Rakete beschleunigt sieht x'_c nach Formel Gl. A9.4 und t'_c nach Formel Gl. A9.5. Dabei lässt sich durch Umformung der Wert für t'_c noch vereinfachen:

$$t'_c = -\gamma \frac{Lv}{2c^2} + \frac{\gamma L}{2(c+v)} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -\gamma \frac{Lv}{2c^2} + \frac{\gamma L}{2(c+v)} \cdot \frac{1}{\gamma^2} \qquad \text{Gl. A9.7c}$$

$$t'_c = -\gamma \frac{Lv}{2c^2} + \frac{L}{2\gamma(c+v)} \qquad \text{Gl. A9.7d}$$

Das Prozedere nach Gleichung Gl. A9.7 ist nun für das Lichtsignal von der Uhr B kommend und die Uhr C erreichend durchzuführen.

$$x_d = \frac{L}{2} + \frac{vL}{2(c-v)}; \quad t_d = \frac{L}{2(c-v)} \qquad \text{Gl. A9.8a}$$

$$x'_d = \gamma\left(\frac{L}{2} + \frac{vL}{2(c-v)} - \frac{vL}{2(c-v)}\right) \quad t'_d = \gamma\left(\frac{L}{2(c-v)} - \frac{Lv}{2c^2} - \frac{v^2L}{2c^2(c-v)}\right) \qquad \text{Gl. A9.8b}$$

Diese Gleichungen Gl. A9.8 stellen eine Analogie zu den Gleichungen Gl. A9.7 dar. Der Zeitpunkt t'_d ist noch zu vereinfachen:

$$t'_d = -\gamma \frac{Lv}{2c^2} + \frac{\gamma L}{2(c-v)} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -\gamma \frac{Lv}{2c^2} + \frac{L}{2\gamma(c-v)} \qquad \text{Gl. A9.8c}$$

Berechnet man nun die zeitliche Differenz, zu der die Lichtsignale bei der Uhr C eitreffen, ergibt sich:

$$\Delta t'_C = t_d - t_c = -\gamma \frac{Lv}{2c^2} + \frac{L}{2\gamma(c-v)} + \gamma \frac{Lv}{2c^2} - \frac{L}{2\gamma(c+v)} \qquad \text{Gl. A9.9a}$$

$$\Delta t'_C = \frac{L}{2\gamma(c-v)} - \frac{L}{2\gamma(c+v)} = \frac{L}{2\gamma} \cdot \frac{c+v-c+v}{c^2-v^2} = \frac{L}{\gamma} \cdot \frac{v}{c^2-v^2} = \frac{\gamma L v}{c^2} \qquad \text{Gl. A9.9b}$$

Ebenso kann man die Differenz der im ruhenden System des Beobachters Zeitpunkte der Aussendung der Lichtsignale bilden. Wegen der relativistischen Gleichzeitigkeit ist diese nicht null. Die Werte finden sich in Gleichung Gl. A9.6:

$$\Delta t'_{A;B} = t_a - t_b = 0 + \gamma \frac{v}{c^2} L \qquad \text{Gl. A9.10}$$

Literatur

[Back] Backhaus, U.: Theoretische Physik, Einführung in die spezielle Relativitätstheorie
Universität Koblenz Koblenz (WS 1999/2000) cited 25.10.2015
http//www.didaktik.physik.uni-due.de/

[Bart] Bartelmann, M. et al.: Theoretische Physik
Springer Spektrum Berlin (2015) cited 28.12.2016
https://books.google.de/

[Bey] Beyvers, G.; Krusch, E.: Kleines 1x1 der Relativitätstheorie, Einsteins Physik mit Mathematik der Mittelstufe
Springer Verlag Berlin (2009) cited 11.03.2015
https://books.google.de/books

[Bis] Bislin, W.: Relativistische Bewegungsgleichungen erklärt
google unbekannt (Schweiz) (27.06.2012) cited 27.12.2016
http://walter.bislins.ch/blog/media/RelatBewegGlAll.pdf

[Bob] Boblest, S.: Spezielle Relativitätstheorie
Universität Stuttgart Stuttgart (2011) cited 22.06.2015
http://itp1.uni-stuttgart.de/lehre/vorlesungen/rela2/ss2011/SRT.pdf

[D.H] D.H (Ps.) et al.: Zeitdilatation
wikipedia unbekannt (25.09.2022) cited 05.01.2023
http://de.wikipedia.org/wiki/Eigenzeit#Allgemeine_Zeitdilatation

[Ein1] Einstein, A.: Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes
Annalen der Physik 35 Prag (21.06.1911) cited 28.04.2014
http://www.itp.kit.edu/~schreck/general_relativity_seminar/Ueber_den_Einfluss_der_Schwerkraft_auf_die_Ausbreitung_des_Lichtes.pdf

[Ein2] Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper
Annalen der Physik, Jg. 17, 1905, S. 891-921 Bern Juni 1905
http://www.pro-physik.de/Phy/pdfs/ger_890_921.pdf

[Emb] Embacher, F.: Spezielle Relativitätstheorie
metager Wien (Österreich) cited 04.12.2008
http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/SRT

[Göh] Göhler, W.: Höhere Mathematik, Formeln und Hinweise
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig 4. Aufl. 1974

[Gre] Greuling, H.: Einstein und das Problem der Zeit
1999 Westdeutscher Rundfunk Köln (09.11.1999) cited 16.01.2017
http://www.stephanholzmann.de/schule/04_interessantes/Quarks%20&%20Co%20Relativit%E4tstheorie/04.htm

[Grü] Gründler, G.: Zeitdilatation beschleunigter Uhren
Astrophysikalisches Institut Neunhof (google) Nürnberg (02/2016) cited 03.01.2017
http//www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd07117.pdf

[Her] Hering, E. et al.: Physik für Ingenieure
Springer-Verlag Berlin Heidelberg Berlin 10. Aufl. 2007

[Hoc] Hoche, D. et al.: Physik Abitur, Duden - Basiswissen Schule
PAETEC Verlag für Bildungsmedien Berlin Mannheim Leipzig Wien Zürich 2003
www.schuelerlexikon.de

[Kley] Kley, W.: Relativistische Astrophysik, Kapitel 8
Universität Tübingen Tübingen cited 22.04.2013
http://www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~kley/lehre/theoast/script/kap8.pdf

[Kuc] Kuchling, H.: Taschenbuch der Physik
Carl Hanser Verlag München 24. Aufl. 08.10.2014

[Mar] Marder, L.: Reisen durch die Raum-Zeit
Vieweg Verlag Braunschweig (1979) cited 22.06.2015
https://books.google.de

[Mau] Maurer, H.: Einsteins Lichtuhr
mahag edition Graz (Österreich) (2007) load 14.09.2018
http://www.mahag.com/srt/uhr.php

[Mes] Meschede, D.: Gerthsen Physik
Springer Verlag Heidelberg 24. Aufl. (2010) cited 26.02.2012
http://www.springerlink.com/content/978-3-642-12894-3#section=782231&page=1&locus=6

[Pet] Petry, S.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Albert Einsteins erste Veröffentlichung zur Speziellen Relativitätstheorie
google unbekannt (12.08.2008) cited 18.10.2008
http://home.vrweb.de/~si.pe/Zur%20Elektrodynamik%20bewegter%20Koerper.pdf

[Schn] Schnizer , B. et al.: Analytische Mechanik
TU Graz (Institut für Theoretische Physik) Graz (Österreich) (27.01.2003) cited 08.01.2023
https://itp.tugraz.at/LV/schnizer/Analytische_Mechanik/am_main.html

[Schu1] Schulz, J.: Direkte Messungen der Zeitdilatation, (Myonen)
google Hamburg (12.05.2007) cited 13.12.2013
http://www.xn--relativittsprinzip-ttb.info/experimente/myonen-lebensdauer.html

[Schu2] Schulz, J.: Rechnung zur Beschleunigung
google Hamburg (31.08.2007) cited 25.12.2016
http://www.xn--relativittsprinzip-ttb.info/gedankenexperiment/beschleunigung-srt.html

[Schu3] Schulz, J.: relativistische Beschleunigung
google Hamburg (31.08.2007) cited 25.12.2016
http://www.xn--relativittsprinzip-ttb.info/gedankenexperiment/beschleunigung.html

[Stef] Stefanov, A.: Relativistische Effekte auf Atomuhren
Universität Bern Bern (Schweiz) (29.09.2012) cited 21.01.2017
http://www.pgz.ch/events/ws1213/event.20120929/art2012_vortrag_stefanov.pdf

[Syd1] Sydow, R. Die Größen n-ter Ordnung, wie man ein Polynom herstellt
Niederfinow 02.06.2022
https://rolfswelt.de/mathematik/#reihen-taylor-reihe

[Syd2] Sydow, R.: Der jüngere Zwilling, eine wissenschaftlich angehauchte Diskussion
Cuvillier Verlag Göttingen 2014

[Syd3] Sydow, R.: Trägheit, am Beispiel des elastischen Stoßes
www (google) Niederfinow (01.09.2022) cited 23.11.2022
https://rolfswelt.de/physik/#mechanik-tragheit

[Unb1] unbekannt: Zeitdilatation - Wikipedia
Lexikon - Datenbank des Wissens unbekannt (28.03.2016) cited 28.12.2016
http://lexikon.ihdsl.de/2016/03/28/zeitdilatation-wikipedia/

[Urb] Urban, W.: Raumflug, Bewegungsgleichungen
HIB Wien Wien (10/2004) cited 27.12.2016
http://www.hib-wien.at/leute/wurban/physik/relativity/raumflug.pdf