



Wahrscheinlichkeitsaddition

R. Sydow, Niederfinow (Deutschland)
(2022)

abstrakt: das hier bearbeitete Problem bezieht sich auf die Fragestellung, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein aus dem Kosmos kommendes Teilchen mit einem Teilchen der Atmosphäre kollidiert. Dabei soll nicht der gesamte höhenabhängige Prozess betrachtet werden.

Für derartige Berechnungen ist es erforderlich, einen sehr kleinen Atmosphärenwürfel zu betrachten, in welchem von konstanten und damit höhenunabhängigen Bedingungen der Molekülverteilung ausgegangen werden kann. Unter diesen Bedingungen lässt sich für einen solchen Würfel die Wahrscheinlichkeit einer Kollision nach der hier berechneten Formel ermitteln.



Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
Berechnung	3
Literatur	6

Berechnung

An dieser Stelle geht es nicht um eine allgemeine Aussage über die Zusammenführung von Einzelwahrscheinlichkeiten. Es geht vielmehr sehr konkret darum, wie sich die Trefferwahrscheinlichkeit der kosmischen Protonen in einem mit Atomen gefüllten Volumen abschätzen lässt.

Zu diesem Zweck sei ein Volumen gegeben. Das Volumen habe die Form eines Quaders, dessen grau gezeichnete Deckfläche orthogonal zur Einfallsrichtung der Protonen stehe (siehe Bild 1).

Das Volumen enthalte eine bekannte Anzahl Z an Atomen. Diese Atome seien in dem Volumen gleichverteilt. Die Gleichverteilung bedeute, dass man den Quader in parallele Schichten teilen kann, sodass die Anzahl der Atome in jeder Schicht identisch ist und innerhalb einer Schicht keine Atome untereinander liegen, sich also in irgendeiner Weise überdecken.

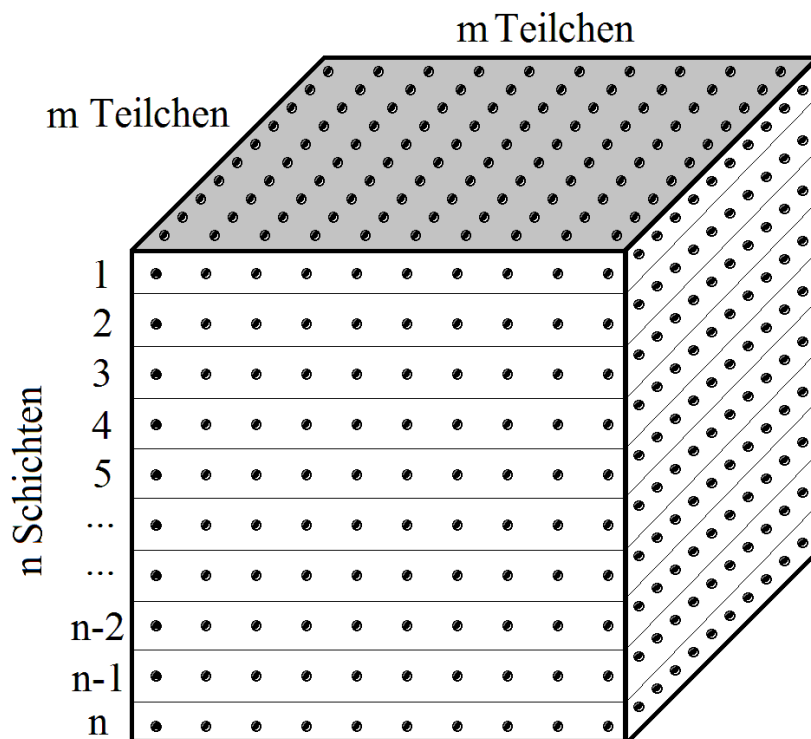


Bild 1: Volumen mit Gleichverteilung der beinhalteten Teilchen

Ein Treffer bedeute, dass ein durch eine Schicht fliegendes Proton mit dem Kern eines Atoms kernverändernd wechselwirke. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer resultiert aus der Querschnittsfläche, die sich aus dem Wechselwirkungsradius ergibt, mal der in einer Schicht enthaltenen Atome in Relation zur Deckfläche des Quaders gesetzt.



Bei den gemachten Voraussetzungen kann davon ausgegangen werden, dass die Wahrscheinlichkeit eines Treffers in jeder Schicht dieselbe ist. Diese Wahrscheinlichkeit sei im Folgenden p genannt.

Die Frage, die sich stellt, ist die Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Proton einen Treffer erzielt, wenn es das gesamte Volumen (spricht: durch alle Schichten) fliegen muss. Um sich dieser Frage nähern zu können, stehen nur die Formeln zur Addition von Wahrscheinlichkeiten (siehe [Tim] S. 292 ff.) zur Verfügung, mit denen man die Gesamtwahrscheinlichkeit für zwei Ereignisse berechnen kann:

$$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ und } B) \quad ([\text{Tim}] \text{ S. 292}) \quad \text{Gl. 1}$$

mit:

$$P(A \text{ und } B) = P(A) * P(B) \quad ([\text{Tim}] \text{ S. 294}) \quad \text{Gl. 2}$$

Bei Anwendung dieser Zusammenhänge ergibt sich der folgende Entwicklungsweg für die Wahrscheinlichkeitsberechnung, wenn man den Durchgang eines Protons durch die aufeinander folgenden Schichten betrachtet. Dabei sein P_i die Trefferwahrscheinlichkeit bis zur i -ten Schicht:

$$P_1 = p$$

$$P_2 = p + P_1 - p * P_1 = 2p - p^2$$

$$P_3 = p + P_2 - p * P_2 = 3p - 3p^2 + p^3$$

$$P_4 = p + P_3 - p * P_3 = 4p - 6p^2 + 4p^3 - p^4$$

$$P_5 = p + P_4 - p * P_4 = 5p - 10p^2 + 10p^3 - 5p^4 + p^5$$

usw.

Betrachtet man das Berechnungsprinzip, fällt auf, dass sich die Koeffizienten vor den Potenzen von p nach einem regelmäßigen Muster ergeben. Aus diesem Muster folgt zwangsläufig eine Struktur, die an das pascalsche Dreieck erinnert. Ihr fehlt lediglich die führende eins. Fügt man diese hinzu und zieht sie gleichzeitig ab, ergibt sich die folgende Form der Berechnung:

$$P_1 = 1 \quad - 1 + 1p$$

$$P_2 = 1 \quad - 1 + 2p - p^2$$

$$P_3 = 1 \quad - 1 + 3p - 3p^2 + p^3$$

$$P_4 = 1 \quad - 1 + 4p - 6p^2 + 4p^3 - p^4$$

$$P_5 = 1 \quad - 1 + 5p - 10p^2 + 10p^3 - 5p^4 + p^5$$

usw.

Bei dieser Weise der Darstellung wird die Parallele zum pascalschen Dreieck offensichtlich.

Klammert man nun noch die minus eins aus dem pascalschen Dreieck aus, ist die Rückführung des Polynoms in eine Potenz möglich:

Quellenangabe: Sydow, R. Wahrscheinlichkeitsaddition Niederfinow (Deutschland) 03.06.2022
<https://rolfswelt.de/mathematik/#wahrscheinlichkeit-addition>

Revision: 1.1.0.2 vom 15.07.2023

copyright ©: alle Rechte vorbehalten, 2022, Rolf Sydow



$$\begin{aligned}P_1 &= 1 - (1 - p) &= 1 - (1 - p)^1 \\P_2 &= 1 - (1 - 2p + p^2) &= 1 - (1 - p)^2 \\P_3 &= 1 - (1 - 3p + 3p^2 - p^3) &= 1 - (1 - p)^3 \\P_4 &= 1 - (1 - 4p + 6p^2 - 4p^3 + p^4) &= 1 - (1 - p)^4 \\P_5 &= 1 - (1 - 5p + 10p^2 - 10p^3 + 5p^4 - p^5) &= 1 - (1 - p)^5 \\&\text{usw.}\end{aligned}$$

Es leitet sich damit die allgemeine Formel für die Trefferwahrscheinlichkeit nach dem Durchqueren der n-ten Schicht ab zu:

$$P_n = 1 - (1 - p)^n \quad \text{Gl. 3}$$

Mit dieser recht einfach aussehenden Formel kann die Trefferwahrscheinlichkeit für das betrachtete Volumen berechnet werden, wenn n die Anzahl der Schichten (Bild 1) ist.



Literatur

[Tim] Timischl, W.; Kaiser, G.: Ingenieur-Mathematik Bd. 2
E. Dorner GmbH Wien 1998