Die Berechnung der Wheatstonebrücke

Trouton und der Widerstand

R. Sydow, Niederfinow (Deutschland)
(2022)

abstrakt: Die Berechnung einer Wheatstonebrücke ist in der Literatur ausreichend behandelt. Leider wird aber oft von der unbelasteten Brücke ausgegangen.

Will man aber so wie beim Versuch von Trouton und Rankine von einer Änderung eines Einflussfaktors auf die Brücke auf die Größe der Änderung des Widerstandes der Brücke schließen, ist es erforderlich, die Spannungs- und Stromänderung über die Brücke zu kennen. Dazu müssen die Formeln der belasteten Wheatstonebrücke bekannt sein.

Die zu erwartenden Parameter der Brücke im besagten Versuch werden ermittelt.

Inhaltsverzeichnis

Beschreibung

Die Wheatstone-Brücke ist ein bekanntes Messelement in der Elektrotechnik (siehe Bild 1). Dementsprechend gibt es ausreichend Literatur zur Beschreibung und Berechnung des Bauteils (siehe [Wen]). Grundsätzlich ist die Wheatstone-Brücke eine Schaltung, in der vier Widerstände R_i, wie in der Darstellung gezeigt, angeordnet sind. Die Schaltung wird von einer Spannungsquelle U_g gespeist, wodurch der Stromfluss I_g initiiert wird.
Damit ergibt sich über jeden Widerstand ein Spannungsabfall U_i, der sich aus dem Stromfluss I_i mal dem Widerstand R_i berechnet. An den Messstellen A und B stellen sich abhängig von den verbauten Widerständen elektrische Potentiale ein, deren Differenz mit einem Messgerät als U_{AB} gemessen werden kann.

Weil das Messgerät (ein Voltmeter) aber einen inneren Widerstand hat, führt dieser zu einem Stromfluss über das Messgerät und wäre in die Berechnung der Brücke mit einzubeziehen. Die Brückenschaltung wird deshalb gerade dazu benutzt, um durch Veränderung eines Widerstandes R_i zu erreichen, dass die Brückenspannung U_{AB} zu null wird, sodass der Einfluss des Messgerätes entfällt.
In der Literatur ist oft die Formel für die Brückenschaltung nur für diesen Fall dargestellt. Aus diesem Grunde sei hier die Formel entwickelt, die bei nicht abgestimmten Widerständen R_i zur Brückenspannung U_{AB} führt.

Dazu ist es notwendig, die beiden unterschiedlichen Zustände der Wheatstone-Brücke zu betrachten. Es gibt die unbelastete Wheatstone-Brücke. Sie zeichnet sich durch die Wahl der Widerstände R_i aus, die so gewählt wurden, dass die Messspannung U_{AB} zu null wird. Damit fließt kein Strom über das Messgerät und der innere Widerstand des Voltmeters hat keinen Einfluss auf die Messung.
Im Gegensatz dazu gibt es die belastete Wheatstone-Brücke. Hier ist die Brückenspannung U_{AB} ungleich null. Damit fließt ein Strom über das Messgerät, der abhängig vom inneren Widerstand des Gerätes ist.

Die unbelastete Wheatstone-Brücke

Wie bereits herausgestellt ist die unbelastete Wheatstone-Brücke gerade so eingestellt, dass die Brückenspannung U_{AB} null ist. Das wird üblicherweise dadurch erreicht, dass ein Widerstand regelbar ist oder mittels Schiebewiderstand zwei Wiederstände variiert werden (siehe [Tro] S. 424 Fig. 3).

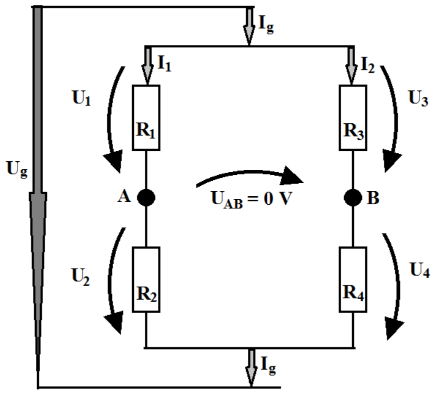

Bild 1: Prinzipskizze der Wheatstone-Brücke (aus [Wen] nachempfunden)

Zur Berechnung dieser Schaltung sind im Folgenden die kirchhoffschen Gesetze angewendet. Der Strom I_g wird sich entsprechend der Knoten-Regel (siehe [Pla] S. 115) in I_1 und I_2 teilen. Es gilt:

$$I_g = I_1 + I_2 \qquad \text{Gl. 1}$$

Nach der Maschen-Regel (siehe [Pla] S. 116) lässt sich ableiten:

$$U_g = U_1 + U_2 = U_3 + U_4 \qquad \text{Gl. 2}$$

und

$$U_{AB} = U_1 - U_3 = U_2 - U_4 \qquad \text{Gl. 3}$$

Wegen der Beziehung R = U/I folgen aus den Gleichungen:

$$U_1 = R_1 I_1; \quad U_2 = R_2 I_1; \quad U_3 = R_3 I_2; \quad U_4 = R_4 I_2 \qquad \text{Gl. 4}$$

woraus sich beim Bilden der Verhältnisse zur Gesamtspannung die entsprechende Stromstärke eliminieren lässt:

$$\frac{U_1}{U_g} = \frac{R_1 I_1}{(R_1+R_2)I_1}; \quad \frac{U_2}{U_g} = \frac{R_2 I_1}{(R_1+R_2)I_1} \qquad \text{Gl. 5}$$

$$\frac{U_3}{U_g} = \frac{R_3 I_2}{(R_3+R_4)I_2}; \quad \frac{U_4}{U_g} = \frac{R_4 I_2}{(R_3+R_4)I_2} \qquad \text{Gl. 6}$$

Nach dem Kürzen der Ströme und Multiplikation mit U_g ergeben sich aus den Gleichungen Gl. 5 und Gl. 6 die Gleichungen für die einzelnen Spannungsabfälle über die benannten Widerstände.

Beim Einsetzen der so gefundenen Gleichungen in Gl. 3 folgt für die Brückenspannung U_{AB} der folgende Zusammenhang:

$$U_{AB} = U_g\left(\frac{R_1}{R_1+R_2} - \frac{R_3}{R_3+R_4}\right) = U_g\left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right) \qquad \text{Gl. 7}$$

Woraus sich nach Gleichsetzen der beiden rechten Terme der Gleichung Gl. 7 der Zusammenhang:

$$R_2 = R_1 \frac{R_4}{R_3} \qquad \text{(vgl. [Mes] S. 346)} \qquad \text{Gl. 8}$$

ergibt.

Wenn also R_2 ein unbekannter Widerstand war, der durch den oben beschriebenen Abgleich der Brückenschaltung zu bestimmen war, dann lässt er sich mittels Gl. 8 berechnen.

Zu bemerken ist, dass diese Herleitung ausschließlich dann funktioniert, wenn sich die Ströme I_1 und I_2 in den Gleichungen Gl. 5 und Gl. 6 rauskürzen lassen. Das ist nur dann der Fall, wenn nach Gl. 4 durch die Widerstände R_1 und R_2 derselbe Strom I_1 und durch die Widerstände R_3 und R_4 derselbe Strom I_2 fließt. Die Bedingung führt zu dem Schluss, dass kein Strom vom Punkt A zum Punkt B fließt und die Brückenspannung U_{AB} zwangsläufig null ist.
Aus Gl. 3 leitet sich somit ab, dass $U_1 = U_3$ und $U_2 = U_4$ sein muss.

Die belastete Wheatstone-Brücke

Kommt die Schaltung aus dem Gleichgewicht und es ergibt sich eine Brückenspannung U_{AB}, muss die Darstellung der Schaltung wie folgt erweitert werden:

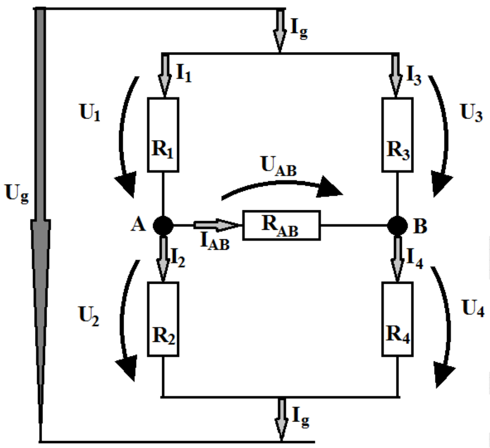

Bild 2 Prinzipskizze der belasteten Wheatstone-Brücke

Widerstand und Stromfluss über das die Brückenspannung messende Voltmeter sind zu berücksichtigen. Es gibt Verschiebungen in den Strömen der einzelnen Leiter.
Um hier rechnerisch weiter zu kommen, sind die Knoten- und Maschenregeln nach Kirchhoff vollständig zu ermitteln. Es gelten analog Gleichungen Gl. 1 bis 4:

$I_g = I_1 + I_3 = I_2 + I_4$ Gl. 9

$U_g = U_1 + U_2 = U_3 + U_4 = R_1 I_1 + R_2 I_2 = R_3 I_3 + R_4 I_4$ Gl. 10

$U_{AB} = U_3 - U_1 = U_2 - U_4 = R_1 I_1 - R_3 I_3 = R_2 I_2 - R_4 I_4$ Gl. 11

$U_1 = R_1 I_1; \quad U_2 = R_2 I_2; \quad U_3 = R_3 I_3; \quad U_4 = R_4 I_3; \quad U_{AB} = R_{AB} I_{AB}$ Gl. 12

Zusätzlich kommen weitere Gleichungen:

$I_{AB} = I_1 - I_2 = I_4 + I_3$ Gl. 13

Setzt man voraus, dass sämtliche Widerstände und die Speisespannung bekannt sind, folgt weiter:

$R_g = \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4}$ Gl. 14

$I_g = U_g R_g$ Gl. 15

So lässt sich aus Gleichungen Gl. 9 und Gl. 11 schließen:

$I_{AB}R_{AB} = R_3(I_g - I_1) - R_1 I_1 = R_3 I_g - (R_1 + R_3)I_1$ Gl. 16

$I_{AB}R_{AB} = R_2 I_2 - R_4(I_g - I_2) = (R_2 + R_4)I_2 - R_4 I_g$ Gl. 16

woraus sich durch Umstellen ergibt:

$I_1 = \frac{-I_{AB}R_{AB} + R_3 I_g}{R_1 + R_3}$ Gl. 17

$I_2 = \frac{I_{AB}R_{AB} + R_4 I_g}{R_2 + R_4}$ Gl. 18

Wegen Gleichung Gl. 13 folgt für I_{AB} die Differenz I_1 - I_2:

$I_{AB} = \frac{-I_{AB}R_{AB} + R_3 I_g}{R_1 + R_3} - \frac{I_{AB}R_{AB} + R_4 I_g}{R_2 + R_4}$ Gl. 19

Diese Gleichung lässt sich nach I_{AB} auflösen zu:

$I_{AB} = I_g \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_{AB}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}$ (vgl. [Hau] S. 7 Gl. 20) Gl. 20

Mit der Lösung für den über den inneren Widerstand des Voltmeters laufenden Strom ist die Brückenspannung mit:

$U_{AB} = I_{AB}R_{AB}$ Gl. 21

ermittelbar.

Die Gleichung Gl. 19 findet durch Einsetzen der Bedingung Gl. 8 den Nachweis, dass diese Bedingung zum unbelasteten Fall der Schaltung führt.

Der Versuch von Trouton und Rankine

Die konkreten Bedingungen in der Versuchsdurchführung von Trouton und Rankine sind in ([Tro]) beschrieben. Die folgenden Werte sind der Veröffentlichung zu entnehmen:

- U_g = 2,1 V (Mittelwert)
- R_i = 11,16 Ω
- R_{AB} = 10 Ω
- $\beta^2 = 10^{-8}$ (bei einer Erdgeschwindigkeit von 30 km/s)
- $I_{AB} = 0{,}86\ 10^{-9}$ A (erwarteter Strom)

Die zu erwartenden Werte für Strom I_{AB} nach der Formel Gl. 20 und Spannung U_{AB} nach Gl. 2.21 bei der angenommenen Erdgeschwindigkeit von 30 km/s berechnet sich zu:

- $I_{AB\_ber.} = 3 \cdot 10^{-9}$ A
- $U_{AB\_ber.} = 3 \cdot 10^{-8}$ V

Literatur

[Hau] Hauck, B.: Gleichstrombrücken, Elektrotechnisches Grundlagen-Labor I
Technische Universität Kaiserslautern Kaiserslautern cited 06.11.2019
https://www.eit.uni-kl.de/hauck/lehre/GLAB_I/GLAB%20I%20-%20Versuch%205.pdf

[Mes] Meschede, D.: Gerthsen Physik
Springer Verlag Heidelberg 24. Aufl. (2010) cited 26.02.2012
http://www.springerlink.com/content/978-3-642-12894-3#section=782231&page=1&locus=6

[Pla] Platt, U.: Physik II, Sommersemester 2005
google Heidelberg cited 17.01.2010
http://www.iup.uni-heidelberg.de/institut/studium/lehre/physikII/Physik-II-S-2005--3-Skript-Elektomagnet-WW.pdf

[Tro] Trouton, F. T.; Rankine, A. O.: On the Electrical Resistance of Moving Matter
Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Vol 80, I. 540, pp. 420-435 London (England) (25.05.1908) cited 27.10.2019
https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1908.0037

[Wen] Wendt, A.: Widerstands-Messbrücke (vereinfacht)
youtube Berlin (2012) cited 03.05.2016
https://www.youtube.com/watch?v=B6sR_I_4Ces