

Die Größen n-ter Ordnung

wie man ein Polynom herstellt

R. Sydow, Niederfinow (Deutschland)
(2022)

abstrakt: Wie oft findet sich in der Literatur (insbesondere früheren Veröffentlichungen) der Hinweis auf Größen erster, zweiter und höherer Ordnung. Solche Hinweise frappieren den ungeübten Leser insbesondere, da der Begriff der ‚Ordnung‘ von einem Polynom bekannt ist, die betrachtete Funktion aber kein Polynom ist.

Deshalb ist hier gezeigt, wie man aus bestimmten Gleichungen ein Polynom generieren kann. Hat man dann die betreffende Gleichung in ein solches umgewandelt, sind dann die Ausdrücke der gewünschten Ordnung verständlich.



Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
Abkürzungen	2
Allgemeines	3
Die taylorische Formel	3
ein erstes Beispiel	5
ein zweites Beispiel	6
ein drittes Beispiel	7
ein viertes Beispiel	7
Anwendung der taylorischen Formel in der RT	8
Literatur	10

Abkürzungen

RT Relativitätstheorie

Allgemeines

Wie oft ist bei Herleitungen in der Physik zu lesen, dass man vereinfachen, runden oder vernachlässigen kann. Man sieht auch immer wieder, dass in solchen Herleitungen gedankliche Sprünge sind, die vom allgemeingebildeten Durchschnittsbürger nicht nachvollzogen werden können.

Wenn beispielsweise die Wurzel $\sqrt{1+x}$ wie durch ein Fingerschnipsen zu dem Polynom $(1 + x / 2)$ verwandelt wird, schaltet dieser brave Leser ab. Solche Gedankensprünge sind für ihn nicht nachvollziehbar. Sie entbehren für ihn der logischen Verbindung.

Vollkommen unverständlich sollte es ihm erscheinen, wenn von Größen erster oder zweiter (respektive n-ter) Ordnung gesprochen wird. Eine solche Ausdrucksweise impliziert dem Leser, dass es wohl diese physikalische Größe in beliebig vielen Ordnungen gibt und nur die Größe einer bestimmten Ordnung aus der Menge der existierenden ausgewählt wird.

In der Physik hingegen ist es Gang und Gäbe, mit derartigen Vereinfachungen zu rechnen. Interessanter Weise ergeben sich bei diesen Vereinfachungen Zusammenhänge, die uns schön und bekannt vorkommen.

Hier soll in aller Kürze untersucht werden, mit welcher Berechtigung diese Vereinfachungen ihren Eingang in die wissenschaftliche Rechnung finden.

Die Taylorsche Formel (siehe [Göh1] S. 54)

Die einfachste Funktion in der Mathematik scheint wohl das Polynom zu sein. Es besticht durch seine einfache Form und dem damit verbundenen Aufbau. Auch sind bestimmte mathematische Verfahren (hier die Differentiation) einfach auf Polynome anzuwenden. Polynome sind dazu eindeutige Funktionen und im kompletten Definitionsbereich definiert.

Mit Polynomen kann man im Diagramm so ziemlich jede eindeutige Kurve nachempfinden. Es kommt dabei nur darauf an, wie viele Glieder eines Polynoms man benötigt, um die gewünschte Kurve darzustellen.

Hier ist der Grundgedanke der Taylor-Reihen-Entwicklung: „für Funktionen, die in einer Umgebung der Entwicklungsstelle definiert und beliebig oft stetig differenzierbar sind“ ([Göh1] S. 60), sind diese Funktionen durch ein Polynom ersetzbar. Die Taylorsche Formel stellt das Instrument dar, mithilfe dessen man das Polynom an der Entwicklungsstelle an die zu ersetzende Funktion anpassen kann.

Die Herleitung der Taylor-Reihe ist sehr schnell gezeigt (mathematisch tiefergreifende Herleitungen sind der Fachliteratur zu entnehmen).



Ein Polynom n-ten Grades genügt der Form:

$$y = f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{Gl. 1}$$

Betrachtet man dieses Polynom an der Entwicklungsstelle x_0 , ist es in der Form:

$$y = f(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x - x_0)^i \quad \text{Gl. 2}$$

darzustellen.

Ein solches Polynom ist n mal differenzierbar. Um es zu differenzieren (abzuleiten) sind drei Regeln zu kennen:

- Summen sind Summand für Summand zu differenzieren
- Summanden, die konstant sind, ergeben null, wenn sie differenziert werden
- Die Ausführung der Differentiation eines Summanden genügt der Gleichung

$$f'_S(x) = \frac{d(a_i(x-x_0)^i)}{dx} = i a_i (x - x_0)^{i-1} \quad (i = 1; 2; 3; \dots) \quad \text{Gl. 3}$$

Vollzieht man die Differentiation eines allgemeinen Polynoms an der Entwicklungsstelle x_0 , ergibt sich folgendes Bild:

Ausgangspolynom:

$$f(x) = a_0(x - x_0)^0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 \dots$$

Die Ableitungen:

$$f'(x) = 0 + 1a_1(x - x_0)^0 + 2a_2(x - x_0)^1 + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 \dots$$

$$f''(x) = 0 + 0 + 2a_2(x - x_0)^0 + 6a_3(x - x_0)^1 + 12a_4(x - x_0)^2 \dots$$

$$f'''(x) = 0 + 0 + 0 + 6a_3(x - x_0)^0 + 24a_4(x - x_0)^1 \dots$$

$$f''''(x) = 0 + 0 + 0 + 0 + 24a_4(x - x_0)^0 \dots \quad \text{Gl. 4}$$

Bei dieser Differentiation ist zu beachten, dass der Term $(x - x_0)^0$ durch die Potenz 0 per Definition zu 1 wird. Damit wird der Summand, der diese Potenz beinhaltet, zu einer Konstanten und verschwindet wegen der 2. Regel (s.o.) bei der Differentiation.

Die Entwicklungsstelle x_0 wird als solche bezeichnet, weil bei der Annahme von $x = x_0$ das Polynom den Wert a_0 annimmt und damit an dieser Stelle mit der zu untersuchenden Funktion übereinstimmt. Die weiteren Betrachtungen beziehen sich also auf die Umgebung dieser Stelle der Funktion. Setzt man den Wert x_0 für x ein, ergeben sich die Ableitungen zu:

$$f^{(i=0)}(x = x_0) = 1a_0 = i! a_0$$

$$f^{(i=1)}(x = x_0) = 1a_1 = i! a_1$$

$$f^{(i=2)}(x = x_0) = 2a_2 = i! a_2$$

$$f^{(i=3)}(x = x_0) = 6a_3 = i! a_3$$

$$f^{(i=4)}(x = x_0) = 24a_4 = i! a_4$$

Der mathematische Hintergrund besteht hier in den Definitionen von $0^0=1$ und $0^{i>0}=0$, sodass nur das mit der Potenz 0 behaftete Glied (Summand) des Polynoms erhalten bleibt.

Jetzt setzt man diese gefundenen Ableitungen nach einem bestimmten Schema zusammen:

Quellenangabe: Sydow, R. Die Größen n-ter Ordnung, wie man ein Polynom herstellt Niederfinow (Deutschland) 02.06.2022

<https://rolfswelt.de/mathematik/#reihen-taylor-reihe>

Revision: 1.3.1.2 vom 18.02.2025

copyright ©: alle Rechte vorbehalten, 2022, Rolf Sydow



$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x = x_0) * (x - x_0)^i \quad \text{Gl. 5}$$

Führt man diese Operation aus, erhält man gerade das Polynom, von welchem man anfänglich ausgegangen war:

$$f(x) = a_0(x - x_0)^0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 \dots$$

Die stechende Logik bei dieser Rechnerei ist nun die folgende:

Wenn man die Ableitungen einer Funktion hat und an der Entwicklungsstelle berechnet, lässt sich nach dem Entwicklungsschema (Gl. 5) ein Polynom entwickeln. Dabei ist es unerheblich, ob die Ableitungen von einem Polynom stammen oder von einer anderen, differenzierbaren Funktion ermittelt wurden.

Ein Spezialfall dieser Betrachtung ist der Fall, in dem $x_0 = 0$ ist. In diesem Fall spricht man von der mac-laurinschen Reihe ([Göh1] S. 60).

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x = 0) * x^i \quad \text{Gl. 6}$$

Dieser einfachere Fall der taylorschen Formel wird sehr oft stillschweigend angewendet, um schwierige Formeln in die leichter zu berechnenden Polynome zu überführen.

ein erstes Beispiel

Es soll im Folgenden ein Beispiel gerechnet werden. Die vorgesehene Formel sei:

$$f(x) = \sqrt{1 - (x - x_0)^2} \quad \text{Gl. 7}$$

Es sind die entsprechenden Ableitungen vorzubereiten. In diesem Fall sollen die ersten beiden Ableitungen genügen:

$$f'(x) = \frac{d(1 - (x - x_0)^2)^{\frac{1}{2}}}{dx} = -\frac{(x - x_0)}{\sqrt{1 - (x - x_0)^2}} \quad \text{Gl. 8}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - (x - x_0)^2}} \quad \text{Gl. 9}$$

Der nun folgende Aufbau einer Tabelle ist lediglich ein Hilfsmittel und unterstützt den Entwicklungsprozess des Polynoms:

i	i!	$f^{(i)}(x=x_0)$	$f^{(i)}(x=x_0)/i!$	$(x - x_0)^i$	$f^{(i)}(x=x_0)/i! * (x - x_0)^i$
0	1	1	1	$(x - x_0)^0 = 1$	1
1	1	0	0	$(x - x_0)^1$	0
2	2	-1	-1/2	$(x - x_0)^2$	-0,5 $(x - x_0)^2$

Tab. 1: Hilfstabelle zur Berechnung einer Taylor-Reihe erstes Beispiel

Damit ergibt sich die Taylor-Funktion als die Summe der berechneten Summanden der letzten Spalte aus der Tabelle Tab. 1 entsprechend der Vorschrift nach Gl. 5:

$$f(x) \approx 1 - \frac{(x - x_0)^2}{2} \quad \text{Gl. 10}$$

Quellenangabe: Sydow, R. Die Größen n-ter Ordnung, wie man ein Polynom herstellt Niederfinow (Deutschland) 02.06.2022

<https://rolfswelt.de/mathematik/#reihen-taylor-reihe>
1.3.1.2 vom 18.02.2025

Revision:
copyright ©: alle Rechte vorbehalten, 2022, Rolf Sydow

ein zweites Beispiel

Für die zweite Rechnung sei die folgende Formel herangezogen:

$$f(x) = \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \quad \text{Gl. 11}$$

Diese Formel scheint vorerst ohne jeglichen physikalischen Bezug zu sein. Augenscheinlich ist sie aber ungewöhnlich und schwer zu erfassen. Deshalb soll sie Mittels Taylor-Reihe in ein Polynom umgewandelt werden. Die Entwicklungsstelle sei $x_0 = 0$. Also werden die entsprechenden Ableitungen gebildet:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{Gl. 12}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)^3}} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{(1+x)^3} + (1-x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}(1+x)^2} \right]$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \left[\sqrt{1+x} \frac{(1+x)+(1-x)}{\sqrt{1-x}(1+x)^2} \right] = -\frac{1}{\sqrt{1-x}(1+x)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{Gl. 13}$$

$$f'''(x) = \frac{\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{3}{2}\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{(1-x)(1+x)^3} = -\frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1-2x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{5}{2}}} \quad \text{Gl. 14}$$

Es lässt sich nun die erforderliche Tabelle an der Stelle $x_0 = 0$ füllen:

i	i!	$f^i(x=x_0)$	$f^i(x=x_0)/i!$	$(x-x_0)^i$	$f^i(x=x_0)/i! \cdot (x-x_0)^i$
0	1	1	1	$x^0 = 1$	1
1	1	1	1	x^1	x
2	2	-1	-1/2	x^2	-0,5x ²
3	6	1	1/6	x^3	0,17x ³

Tab. 2: Hilfstabelle zur Berechnung einer Taylor-Reihe zweites Beispiel

Damit ergibt sich die o. g. Funktion $f(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ als das folgende Polynom:

$$f(x) \approx 1 + x - 0,5x^2 + 0,17x^3 \quad \text{Gl. 15}$$

Wäre die Entwicklungsstelle eine andere, würde das Ergebnis der Funktion auch anders ausfallen. Die Werte für die Ableitungen an der Stelle $x = x_0$ würde andere Werte ergeben, sodass sich ein völlig anderes Polynom ergibt. Dieses andere Polynom hätte den Vorteil, dass es an der Entwicklungsstelle den Fehler null zur Ausgangsgleichung aufweisen würde.

Damit sei gezeigt, dass das Polynom bei der Entwicklung einer Funktion nach der Taylorschen Formel immer von der Stelle abhängt, an der es entwickelt wird. In der Umgebung dieser Stelle sollte das Polynom die Funktion am genauesten beschreiben.

Dieses Beispiel zeigt, so man denn das Polynom als Doppler-Effekt interpretieren wollte, dass die Ableitungen einer Ausgangsfunktion (Gl. 11) in ihren Ableitungen sowohl den Doppler-Effekt 1. Ordnung, als auch der 2. Ordnung enthält. Ungeklärt bleibt dabei die Frage, welche Bedeutung diese Gleichung für den Doppler-Effekt hat und wie sie physikalisch zu interpretieren ist. Weiter steht natürlich die Frage im Raum, welche Bedeutung der 3. Ordnung dieser Funktion zukommt?

Damit wird angedeutet, dass die Ausdrucksweise des Doppler-Effektes in verschiedenen Ordnungen kontraproduktiv ist. Das begründet sich insbesondere darin, dass dem Doppler-Effekt 1. Ordnung keine zeitverändernde Bedeutung zukommt, während dem der 2. Ordnung eine Zeitdilatation angedichtet wird.

ein drittes Beispiel

Es soll im Folgenden ein Beispiel gerechnet werden. Die vorgesehene Formel sei:

$$f(x) = 1/\sqrt{1 - (x - x_0)^2} \quad \text{Gl. 16}$$

Es sind die entsprechenden Ableitungen vorzubereiten. In diesem Fall sollen die ersten beiden Ableitungen genügen:

$$f'(x) = \frac{d(1 - (x - x_0)^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx} = (x - x_0)(1 - (x - x_0)^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{Gl. 17}$$

$$f''(x) = (1 - (x - x_0)^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x - x_0)^2(1 - (x - x_0)^2)^{-\frac{5}{2}} \quad \text{Gl. 18}$$

Der nun folgende Aufbau einer Tabelle ist lediglich ein Hilfsmittel und unterstützt den Entwicklungsprozess des Polynoms:

i	i!	f ⁱ (x=x ₀)	f ⁱ (x=x ₀)/i!	(x - x ₀) ⁱ	f ⁱ (x=x ₀)/i! * (x - x ₀) ⁱ
0	1	1	1	(x - x ₀) ⁰ = 1	1
1	1	0	0	(x - x ₀) ¹	0
2	2	1	1/2	(x - x ₀) ²	0,5(x - x ₀) ²

Tab. 3: Hilfstabelle zur Berechnung einer Taylor-Reihe drittes Beispiel

Damit ergibt sich die Taylor-Funktion als die Summe der berechneten Summanden der letzten Spalte aus der Tabelle Tab. 1 entsprechend der Vorschrift nach Gl. 16:

$$f(x) \approx 1 + \frac{(x - x_0)^2}{2} \quad \text{Gl. 19}$$

ein viertes Beispiel

Es soll im Folgenden ein Beispiel gerechnet werden. Die vorgesehene Formel sei:

$$f(x) = (x - x_0)/\sqrt{1 - (x - x_0)^2} \quad \text{Gl. 20}$$

Es sind die entsprechenden Ableitungen vorzubereiten. In diesem Fall sollen die ersten beiden Ableitungen genügen:

$$f'(x) = (1 - (x - x_0)^2)^{-\frac{1}{2}} + (x - x_0)^2(1 - (x - x_0)^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= (1 - (x - x_0)^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{Gl. 21}$$

$$f''(x) = 3(x - x_0)(1 - (x - x_0)^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{Gl. 22}$$

Der nun folgende Aufbau einer Tabelle ist lediglich ein Hilfsmittel und unterstützt den Entwicklungsprozess des Polynoms:

i	i!	$f^i(x=x_0)$	$f^i(x=x_0)/i!$	$(x - x_0)^i$	$f^i(x=x_0)/i! \cdot (x - x_0)^i$
0	1	0	0	$(x - x_0)^0 = 1$	0
1	1	1	1	$(x - x_0)^1$	$x - x_0$
2	2	0	0	$(x - x_0)^2$	0

Tab. 3: Hilfstabelle zur Berechnung einer Taylor-Reihe drittes Beispiel

Damit ergibt sich die Taylor-Funktion als die Summe der berechneten Summanden der letzten Spalte aus der Tabelle Tab. 1 entsprechend der Vorschrift nach Gl. 20:

$$f(x) \approx (x - x_0) \quad \text{Gl. 23}$$

Anwendung der Taylorschen Formel in der RT

Wie dem aufmerksamen Leser aufgefallen ist, sind in den Gleichungen der Ableitungen (Gl. 4) immer drei Punkte am Ende, die darstellen sollen, dass ein Polynom noch mehr Glieder haben kann. Insbesondere bei der Aufbereitung anderer Funktionen, die definitionsgemäß (s.o.) beliebig oft differenzierbar sein sollen, ist davon auszugehen, dass man wesentlich mehr Glieder erzeugen kann, um daraus ein Polynom zu generieren.

Hier setzt der Physiker an, um zu vereinfachen. Er vernachlässigt die Glieder ab einem bestimmten Grad des Polynoms mit der Begründung, dass sie sehr klein wären.

Wenn der betrachtete Wert x eine Funktion von v / c ist, mag das im Bereich der gängigen Praxis richtig sein. Wegen der sehr hohen Lichtgeschwindigkeit wird der Quotient v / c sicherlich klein sein. Potenziert man diesen Wert, der jedenfalls kleiner 1 sein muss, ergeben sich noch kleinere Werte, die berechtigter Weise vernachlässigbar sein dürften.

Es ergibt sich aber ein Problem, wenn man Prozesse betrachtet, in denen die Geschwindigkeit v eben nicht klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c ist. Das können Prozesse im Speicherring oder auch Prozesse schneller Teilchen sein. Dann führt die Vernachlässigung der Summanden höheren Grades zu Fehlern, die nicht mehr vernachlässigbar sind.



Hier besteht eine Gefahr in der Anwendung des Verfahrens der Taylor-Entwicklung im Bereich der Relativitätstheorie. Dem ist nur zu entgegen, indem man die mangelnde Gleichwertigkeit derart gefundener Polynome dokumentiert. Derartige Zusammenhänge dürfen nicht bedingungslos mit einem Gleichheitszeichen versehen werden.



Literatur

[Göh1] Göhler, W.: Höhere Mathematik, Formeln und Hinweise
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig 4. Aufl. 1974